**При поддержке Фонда президентских грантов**

**Математика НОН-СТОП**

**Сборник задач**

Б. А. Золотов Д. Г. Штукенберг

И. А. Чистяков А. В. Семенов И. С. Алексеев

Фонд «Время науки»

Санкт-Петербург

2019

**Предисловие**

***И. А. Чистяков*** *—**президент фонда**«Время науки»,**директор**ЧОУ ОиДО «Лаборатория непрерывного математического об-разования», вице-президент Европейского турнира юных мате-матиков, автор задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»*

* *2010–2015 годах*

Дорогие юные математики, коллеги, друзья! Вы держите в руках не просто сборник олимпиадных задач, а скорее книгу, в которой рассказывается о системе математического образования, созданной фондом поддержки молодых ученых «Время науки».

Проекты фонда взаимосвязаны и не могут рассматриваться отдельно друг от друга. Одной из главных задач фонда является привлечение талантливой молодежи к занятиям наукой, в частности математикой. При содействии фонда работает целая структура дополнительного образования, а также система научных семинаров, турнир юных математиков, олимпиада «Математика НОН-СТОП», летняя профильная математиче-ская школа, Балтийский научно-инженерный конкурс. Опыт создания этой системы оказался настолько успешным, что многие из мероприятий фонда проводятся теперь в различных российских регионах. Так, например, Балтийский научно-инженерный конкурс имеет на сегодняш-ний день 17 региональных представительств.

Однако по порядку. Основой содержательной математической деятельности является семинар. В 1992 году группа молодых (тогда) пе-тербургских математиков, среди которых были к. ф.-м. н. С. М. Шиморин, к. ф.-м. н. Д. Г. Бенуа, И. А. Чистяков и вскоре присоединившиеся к ним к. ф.-м. н. Т. Н. Шилкин, д. ф.-м. н. С. И. Кублановский, А. О. Виро, к. ф.-м. н. А .А. Флоринский, Е. А. Абакумов стали вести научные семинары для старшеклассников и руководить научными проектами. Так возникла «Лаборатория непрерывного математического образования» (ЛНМО) — в те годы молодежный научный коллектив, ставящий перед собой задачу привлечения к занятиям наукой тех школьников, которые обладали незаурядными математическими способностями, но тем не менее по некото

Предисловие

рым причинам в большей своей части не имели значительных олимпи-адных достижений.

Время, в которое начинала свою деятельность ЛНМО, было непро-стым, даже скорее трудным для большинства молодых математиков. Многие из них уехали из страны, другие сменили сферу деятельности. Количество способных к математике студентов стало снижаться, несмот-ря на все усилия декана математико-механического факультета СПбГУ профессора Г. А. Леонова — человека, благодаря которому факультет пе-режил самые тяжелые годы. Математическое сообщество старело, и при-влечение к математике школьников стало одной из основных задач.

* 1994 году ЛНМО стала сотрудничать с математико-механичес-ким факультетом СПбГУ. Это сразу дало свои плоды. Так, в 1992 году в ЛНМО работало всего 3 математических семинара. С. М. Шиморин и И. А. Чистяков руководили семинарами по математическому анализу, Д. Г. Бенуа — по алгебре. В 1995 году в лаборатории было открыто уже 10 науч-ных семинаров. Среди руководителей семинаров этого периода — про-фессор М. М. Лесохин, профессор Н. А. Широков, профессор В. М. Нежинс-кий, к. ф.-м. н. В. Л. Кобельский, к. ф.-м. н. В. Ю. Добрынин.

Впоследствии ЛНМО стала частным образовательным учреждени-ем, где работа в системе научных семинаров и спецкурсов является вер-шиной в процессе получения школьником среднего образования.

Семинары 90-х годов воспитали первую плеяду учеников, которые впоследствии стали научными руководителями школьников и студен-тов, закончили математико-механический факультет СПбГУ, аспиранту-ру и защитили кандидатские диссертации. Выпускниками ЛНМО защи-щены 42 кандидатских диссертации, из каждого выпуска ЛНМО до поло-вины выпускников становятся аспирантами, до 7-8 — кандидатами наук.

Сейчас благодаря гранту Фонда президентских грантов в ЛНМО ра-ботает 27 математических семинаров, а всего по разным специально-стям — 61. Среди руководителей — д. ф.-м. н. С. И. Кублановский, к. ф.-м. н. А. В. Смоленский, к. ф.-м. н. Р. А. Гученко, к. ф.-м. н. Ю. А. Ильин, к. ф-м. н. С. О. Иванов, аспиранты А. В. Семенов, В. А. Соснило, А. А. Зайковский

* многие другие.
  + то же время ощущался дефицит научного общения участников се-минаров с другими школьниками, тоже делающими свои первые шаги в науке. Поэтому получили развитие научные конференции школьников, в числе которых отметим Сахаровские чтения, проводимые лицеем ФТШ в Петербурге (Я. Д. Бирман, к.  х.  н. Н. М. Химин, Д. В. Фредерикс, к. ф.-м. н.
    - **II** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

М. Г. Иванов, Е. А. Нинбург), и конференцию, посвященную памяти акаде-мика С. Н. Бернштейна. Большую поддержку в это время оказали профес-сор М. П. Юшков и профессор В. С. Виденский. Будучи совсем небольшой, конференция памяти Бернштейна привлекала к себе тех юных исследо-вателей, которые уже в 9–11 классе могли потратить на научную рабо-ту значительное время. Высокий уровень профессионального научного жюри стал отличительной карточкой этой конференции.

* Москве в области математики лидирующее положение занима-ли конференция при МЭИ (Московском энергетическом институте), бла-годаря усилиям А. А. Егорова, к. ф.-м. н. А. П. Савина, Ж. М. Раббота, к. ф.-м. н. В.Н. Дубровского и к. п. н. Л. Б. Огурэ,, конференция «Династия–Аван-

гард», математическое направление которой возглавляет к. ф.-м. н. Д. В. Андреев,, конференция «Юниор» (профессора А. Д. Модяев, Н. М. Леонова, А. В. Михалев и Н. А. Кудряшев).

Одновременно возникли международные конференции, из числа которых отметим конференцию молодых ученых (IСYS), первым побе-дителем которой стал Владимир Камоцкий, занимавшийся в семинаре по гомологической алгебре (руководитель Д. Г. Бенуа, ныне известный ма-тематик). Абсолютный рекорд этого научного форума принадлежит вы-пускнику научных семинаров Дмитрию Парилову: он в 9, 10 и 11 классах был награжден золотой медалью, став абсолютным победителем. Дмит-рий Владимирович Парилов защитил кандидатскую диссертацию и ус-пешно работает в России.

* 1998 году Россия впервые приняла участие в международном кон-курсе научных и инженерных достижений учащихся — ISEF, собираю-щем более полутора тысяч школьников из более чем 60 стран мира. 30 учеников ЛНМО награждены премиями научного жюри, еще 10 — пре-миями Карла Менгера, присуждаемыми Американским математичес-ким обществом.

Пять научных работ отмечены высшими премиями научного жю-ри, именами петербургских школьников — Сергея Иванова, Евгения Ло-хару, Евгения Амосова, Артема Викторова и Гаджи Османова — названы малые планеты Солнечной системы. С. О. Иванов и Е. Э. Лохару защитили кандидатские диссертации и активно работают в области математики. Сергей Олегович Иванов в 2014 году назван лучшим молодым матема-тиком Санкт-Петербурга, 14 выпускников лаборатории награждены пре-миями имени В. А. Рохлина.

Камерная научная конференция, посвященная памяти академика

− **III** −

Предисловие

С. Н. Бернштейна, не могла уже справиться с нарастающим числом работ

* была преобразована в конференцию им. академика П. Л. Чебышева, ро-доначальника Петербургской математической школы, а в 2004 году — в Балтийский научно-инженерный конкурс. На первом Балтийском науч-но-инженерном конкурсе было представлено 60 проектов,, в 2019 году на юбилейном XV конкурсе в отборочных этапах приняли участие 2059 юных исследователей, а в финале представлены более 400 проектов из более чем 60 регионов России и Белоруссии.

Председателем научного жюри Балтийского конкурса является профессор Н. А. Широков, секцию математики возглавляет профессор Н. М. Нежинский,, подсекции — к. ф.-м. н. А. В. Смоленский, а также к. п. н. В. В. Крылов. Второй год работает жюри ПОМИ РАН, которое возглавляет профессор А. И. Назаров.

Развитие научной и проектной деятельности высветило ряд про-блем, без решения которых далее невозможно совершенсвтовать работу научных семи-наров. Для выполнения серьезных математических исследований школь-ник должен знать важнейшие разделы математики. Так возникла идея проведения летних профильных математических школ, в которых аспи-ранты и молодые кандидаты наук погружали старшеклассников в раз-делы математики, которые были совершенно необходимы для решения математических задач. Часто на семинарах летней школы ставились и задачи для исследования, и школьники успевали получить значительные результаты в их решении.

Пытливый подростковый ум нуждается в постоянной подпитке, ре-шении модельных задач, которые построены по следующему принципу. Каждая задача начинается введением в теорию, в котором ученику разъ-ясняются основные определения. При этом первые пункты задачи более или менее известны. По мере продвижения по задаче пункты усложня-ются, решения последних пунктов неизвестны автору задачи и часто яв-ляются темой самостоятельного научного исследования.

* качестве реализации этой идеи появилось несколько турниров юных математиков, проводящихся в разных городах по схожим прави-лам. Участниками таких турниров были в основном старшеклассники. Один из таких турниров — Санкт-Петербургский турнир юных матема-тиков — проводится как раз при поддержке фонда «Время науки».

Форма проведения турнира была заимствована из белорусских тур-ниров юных математиков (к. ф.-м. н. Б. В. Задворный), хотя петербургс-кий турнир отличается более жесткими правилами проведения и труд-ностью задач. В последнее время петербургские турниры юных матема-

− **IV** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

тиков проводятся и для 5–7 классов (средняя и младшая лига). Факт су-ществования этих турниров, по нашему убеждению, способствует при-влечению к занятиям наукой талантливых детей, которые впоследствии станут участниками научных семинаров ЛНМО. Руководитель проекта — И. С. Алексеев. Жюри турниров возглавляют к. ф.-м. н. Ю. А. Ильин и про-фессор В. М. Нежинский.

Усилиями европейских математиков по аналогичным правилам организован международный турнир, участниками которого становят-ся победители национальных турниров. Президентом конкурса является профессор Давид Змейков.

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» выполняет ту же функцию, что и младшая и средняя лиги турнира юных математиков, — привле-кать школьников 4–8 классов к решению исследовательских задач. Нам казалось неразумным сразу приступить к решению этой трудной задачи, необходимо было воспитать молодых математиков — составителей ис-следовательских задач и найти в Петербурге школы, понимающие важ-ность этого проекта. С этими задачами олимпиада прекрасно справи-лась.

* первые годы олимпиады отбор задач был традиционен, они под-бирались из числа задач петербургских, московских, белорусских олим-пиад, однако усложнялись правила их выполнения. Каждая задача олим-пиады состояла из трех пунктов, решение первого из которых оценива-лось в 3 балла, решение второго — в 6 баллов, а третьего в 9 баллов. В зачет по каждой задаче входил тот пункт, за который участник получил наибольшее число баллов.

Тем самым школьнику необходимо не только решать задачи, но и продумывать стратегию работы на олимпиаде. Многие школьники, ко-торые брались за решение только сложных пунктов, зачастую делали в них ошибки и получали невысокий балл на олимпиаде. Такая же участь ждала тех, кто решал простые пункты, их суммарный балл также был невысок.

Большое значение мы придавали тому факту, что школьники, ко-торые не справились с решениями задач во время олимпиады, дома и

* школе могли продолжить их решение. А наиболее глубокие школьни-ки получали приглашение заниматься в научных семинарах и учиться в профильных математических классах, организуемых на основе государ-ственно-частного партнерства ЛНМО и ГБОУ СОШ №564.

Тем самым была решена задача по привлечению школьников к за-

* + **V** −

Предисловие

нятиям математикой, а также сформировался коллектив студентов–ма-тематиков, способных предлагать исследовательские задачи. И с 2016 го-да олимпиада «Математика НОН-СТОП» приобрела задуманную форму. Каждая задача *базовых вариантов*, как и прежде, состоит из трех пунктов, последний из которых наиболее сложен, размышления по этому пункту могут привести школьника к решению научной проблемы. Для школьни-ков 7–8 классов появился *профильный вариант*, для реализации возмож-ности поиска одаренных детей, которые не занимаются в математиче-ских кружках, даже если, возможно, учатся в математических школах.

Это дало результат. Многие дети из общеобразовательных школ по-лучили возможность занятий в профильных научных семинарах. Олим-пиада поддерживается кафедрой математического образования и инфор-матики АППО (к. п. н. Е. Ю. Лукичева) и входит в перечень региональ-ных конкурсов интеллектуальной направленности правительства Петербурга.

* олимпиаде участвуют более тысячи школьников Санкт-Петербурга и Ленинградской области.

Руководитель проекта — Б. А. Золотов, победитель олимпиады «Ма-тематика НОН-СТОП» 2011 года. Председатель жюри — Д. Г. Штукенберг.

Книга адресована не только школьникам, интересующимся мате-матикой, но и учителям и организаторам математического образования. Руководители научно-исследовательских работ школьников смогут по-черпнуть из сборника темы для исследования.

− **VI** −

**Оглавление**

**Предисловие** **I**

**От авторов** **1**

**Условия задач олимиады 2016–18 гг.** **2**

**Условия задач 2018 года** **2**

4 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21

7 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29

8 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

**Условия задач 2017 года** **39**

4 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 55

7 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

8 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

**Условия задач 2016 года** **69**

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 74

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83

7 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90

8 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93

i

Предисловие

**Решения задач олимиады 2016–18 гг.** **97**

**Решения задач 2018 года** **97**

4 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 108

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 120

7 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 125

8 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131

**Решения задач 2017 года** **134**

4 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 138

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 148

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 155

7 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161

8 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166

|  |  |
| --- | --- |
| **Решения задач 2016 года** | **169** |

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 171

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 178

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 189

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 200

7 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 210

8 класс, профильный вариант . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 217

|  |  |
| --- | --- |
| **Условия и решения избранных задач** |  |
| **олимпиады 2011–15 гг.** | **219** |
| **Решения задач 2015 года** | **219** |

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 232

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 236

|  |  |
| --- | --- |
| **Решения задач 2014 года** | **241** |

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 243

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244

− **ii** −

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 247

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 253

**Решения задач 2013 года** **256**

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257

**Решения задач 2012 года** **260**

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 261

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 263

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 267

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 271

|  |  |
| --- | --- |
| **Решения задач 2011 года** | **273** |

5 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 275

6 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 276

7 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 277

8 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 278

9 класс . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 283

|  |  |
| --- | --- |
| **Научная деятельность школьников** | **285** |
| **Задачи Петербургских турниров юных математиков** | **285** |

2018 год . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 287

2017 год . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 305

2016 год . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 319

2015 год . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 336

|  |  |
| --- | --- |
| **Исследовательские проекты для школьников** | **347** |

**От авторов**

Олимпиада «Математика НОН-СТОП» проводится с 2010 года, за это время значительно выросло как число ее участников, так и интерес, проявляемый к ней в том числе со стороны образовательных организа-ций Санкт-Петербурга и известных фондов, которые теперь оказывают поддержку олимпиаде.

* + 2010–2015 годах составителем условий задач был И. А. Чистяков,
* олимпиада включала в себя варианты для 5–8 классов из 6–12 задач, поделенных на пункты A, B и C. С 2016 года условия задач для олимпи-ады составляют Б. А. Золотов (выпускник и сотрудник ЛНМО) и Д. Г. Штукенберг (сотрудник ЛНМО).

Одновременно с этим в олимпиаде появился профильный вариант для 7–8 классов: задачи профильного варианта представляют из себя це-лую исследовательскую проблему, раскрывающуюся перед школьником пункт за пунктом. Последним нововведением олимпиады стал вариант для четвертого класса, присутствующий с 2017 года.

Первая часть этой книги — условия олимпиад, прошедших в 2016– 18 годах. Задачи можно давать детям на занятиях в математических кру-жках,, они позволяют примерно ориентироваться на то, какими будут за-дания на олимпиаде «Математика НОН-СТОП» в ближайшем будущем. Авторы задач — Б. А. Золотов, Д. Г. Штукенберг, И. С. Алексеев.

Следом за условиями задач 2016–18 гг. во второй части этой книги представлены их решения, предложенные самими авторами задач (рас-смотрены в том числе задачи профильных вариантов). Если при разбо-ре задачи возникают трудности или стало интересно ознакомиться с не-обычными методами решения, стоит смотреть как раз вторую часть кни-ги. Автор разбора 2017–18 — Б. А. Золотов, 2016 — Д. Г. Штукенберг.

* третьей части книги представлены избранные, наиболее ориги-нальные задачи 2011–15 годов, сразу с решениями. Обычно таких задач оставалось по 3–4 на вариант. Авторы разборов 2012–15 — Б. А. Золотов, А. В. Семенов, 2011 — Л. А. Бакунец, И. Г. Прокофьева, Д. Г. Штукенберг.

Четвертая часть этой книги — условия задач петербургских турни-ров юных математиков (СПбТЮМ). СПбТЮМ проводится с 2015 года и от-

личается интересными, сложными заданиями — некоторые из них впо-следствии перерастают в научные работы, представляемые на различ-ных конференциях школьников. В этой книге мы собрали все задачи, бывшие на турнирах с самого основания СПбТЮМ.

Авторы задач СПбТЮМ — К. М. Чепуркин, И. С. Алексеев.

Наконец, в пятой части книги мы привели несколько тем для школь-ной научной работы. Данные темы, с одной стороны, интересны для нау-ки, а с другой, как нам представляется, посильны детям. Подоб-ные темы могут быть любопытны для школьников, желающих выступить на научных конференциях, проводимых, например, под эгидой фонда «Время науки».

Желаем приятного и познавательного чтения!

**Условия задач 2018 года**

**Задачи 4 класса**

**Задача 1. Где-то я это уже видел**

1. Сколько дат в году могли бы оказаться на экране цифровых часов в качестве времени? *Например, 19* *июня* *— 19:06,* *а* *27* *ноября времени* *не соответствует.*
2. Сколько дат в году могли бы появиться на экране цифровых часов, если разрешено использовать сначала месяц, а потом день? *Напри-*

*мер, 27 ноября тогда будет соответствовать время 11:27.*

1. Автомобильный номер в Ленинградской области имеет вид

47 RUS

Вместо квадратиков стоят цифры, а вместо крестиков — буквы рус-ского алфавита, заглавные варианты которых похожи на какие-либо буквы английского алфавита (например, такие буквы — А, Т или У).

На скольких номерах в Ленинградской области есть ровно одна гласная? А ровно две гласных?

**Задача 2. Напрасно называют север крайним**

1. Один коротышка с двумя ногами поехал кататься на велосипеде. Но так как на дворе была зима, 10 градусов, он отморозил себе одну

ногу. Другой коротышка через месяц поехал кататься на велосипе-де. Но на дворе по-прежнему была зима, уже 20 градусов, и он от-морозил себе все имеющиеся ноги (их также было две).

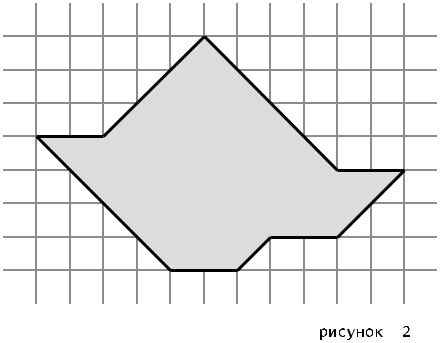
Сколько ног отморозит себе на 10- и на 20-градусном морозе тури-стическая группа из 40 коротышек? А их маленький серый кот, у которого ног изначально четыре? А речной рак, у которого восемь ног?

2018 год, 4 класс

1. Барон Мюнхгаузен говорит, что обошел вокруг света (то есть побы-вал на всех возможных долготах Земного шара) за 40 минут. При этом известно, что он не лжет. Как такое могло произойти?
2. Однажды в стране Северной Болоторфии собрались построить до-роги. Каждый город решили соединить дорогой с тремя другими городами, самыми близкими к нему. Может ли статься так, что най-дутся города *A* и *B*, для которых, согласно указанному правилу, го-род *A* должен быть соединен с городом *B*, а город *B* с городом *A* — нет?

**Задача 3. Разрезания**

1. Укажите, как разрезать произвольный квадрат на 7 многоугольни-ков, у которых одинаковы как площади, так и суммарные длины сторон, лежащих на границе исходного квадрата.
2. Укажите, как разрезать изображенную на рисунке 2 фигуру на 6 рав-ных фигур.



1. Представьте, что одну из египетских пирамид (египетские пирами-ды симметричны и имеют в основании квадрат) покрасили розовой краской (покрашены оказались ее четыре стороны, но не основа-ние). Как разрезать ее на три части одинакового объема, несущие на себе одинаковое количество краски?

**Задача 4. Летающий цирк**

*Если вы скажете слово «матрас»,*

*он наденет ведро себе на голову.*

− **4** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

1. Если сказать мистеру Лэмберту слово «МАТРАС», он кричит „Кара-ул!“, снимает перчатки, надевает на голову ведро, встает одной но-гой в коробку из-под телевизора и поет два куплета из песни про коня.

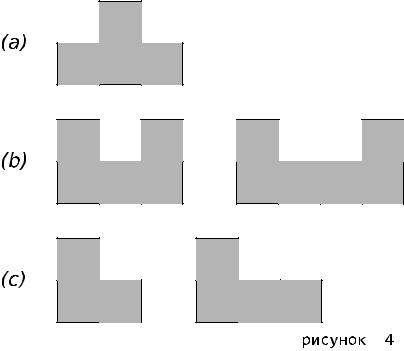
Если сказать мистеру Лэмберту слово «СТАРТ», он кричит „Кара-ул!“, снимает перчатки, встает двумя ногами в коробку из-под те-левизора и поет один куплет из песни про коня.

А что будет, если сказать мистеру Лэмберту слово «МАРС»?

1. У джентльмена есть 34 доллара, и он хочет купить себе шляпу. Про-давец называет цену в 120 долларов, но джентльмен должен торго-ваться. Каждый раз, когда джентльмен торгуется, продавец сбавля-ет цену до среднего арифметического финансовых возможностей джентльмена и цены, названной на предыдущем шаге, — джентль-мен же в это время оглядывается и находит одну долларовую мо-нетку, лежащую на брусчатке. Сможет ли джентльмен когда-нибудь купить себе желанную шляпу?
2. **Тревор:** «Этот сконфуженный кот стоит9600рублей».

**Джереми:** «Кот дешевле,поскольку Тревор в4раза преувеличива-ет каждое число, которое называет. Хоть он только что и сказал про стоимость кота в 2400 рублей, кот на самом деле стоит 150 рублей». Подсчитайте, во сколько раз Джереми преуменьшает каждое про-износимое число и сколько на самом деле стоит сконфуженный кот.

**Задача 5. Мощения**



1. Укажите, как замостить плоскость фигурой с рисунка 4*(a)*.
2. Укажите способ , которым можно замостить плоскость каждой из двух фигур на ри-сунке 4*(b)*.
   * **5** −

2018 год, 5 класс

**C.** Можно ли сложить квадрат какого-либо размера из деревянныхплиток в форме фигур, изображенных на рисунке 4*(c)*? При этом необходимо пользоваться плитками обеих форм.

**Задача 6. Ужасный гадкий аккуратный подсчет**

1. Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4 5 кле-ток. Сколько на нем можно найти квадратов? А прямоугольников?
2. Круг разделен на *n* секторов одинакового размера. Сколькими спо-собами можно покрасить эти *n* секторов в *n* цветов, если две рас-краски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?
3. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зеленый, черный, жел-тый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трех горизонтальных цветных полос, такие, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — бе-лый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?

**Задачи 5 класса**

**Задача 1. Летающий цирк**

*Если вы скажете слово «матрас»,*

*он наденет ведро себе на голову.*

1. Если сказать мистеру Лэмберту слово «МАТРАС», он кричит „Кара-ул!“, снимает перчатки, надевает на голову ведро, встает одной но-гой в коробку из-под телевизора и поёт два куплета из песни про коня.

Если сказать мистеру Лэмберту слово «СТАРТ», он кричит „Кара-ул!“, снимает перчатки, встает двумя ногами в коробку из-под те-левизора и поёт один куплет из песни про коня.

А что будет, если сказать мистеру Лэмберту слово «МАРС»?

− **6** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

1. У джентльмена есть 34 доллара, и он хочет купить себе шляпу. Про-давец называет цену в 120 долларов, но джентльмен должен торго-ваться. Каждый раз, когда джентльмен торгуется, продавец сбавля-ет цену до среднего арифметического финансовых возможностей джентльмена и цены, названной на предыдущем шаге, — джентль-мен же в это время оглядывается и находит одну долларовую мо-нетку, лежащую на брусчатке. Сможет ли джентльмен когда-нибудь купить себе желанную шляпу?
2. **Тревор:** «Этот сконфуженный кот стоит9600рублей».

**Джереми:** «Кот дешевле,поскольку Тревор в4раза преувеличива-ет каждое число, которое называет. Хоть он только что и сказал про стоимость кота в 2400 рублей, кот на самом деле стоит 150 рублей». Подсчитайте, во сколько раз Джереми преуменьшает каждое про-износимое число и сколько на самом деле стоит сконфуженный кот.

**Задача 2. Рукопожатия**

**A.** Тридцать пять восьминогих существ— 18крабов и17пауков—встали в хоровод, имеющий форму восьмерки. Это значит, что су-щество, стоящее в центре этой восьмерки, держит за лапы четве-рых своих соседей (благо, лап у него восемь, ему хватит). Известно, что каждый краб держится за лапы исключительно с пауками. Кто стоит в центре восьмерки — краб или паук?

1. В компании работает двадцать шесть человек, и каждый дружит ровно с пятью другими. После подведения итогов государственной лотереи оказалось, что у каждого сотрудника найдется друг или же друг его друга (это может быть и сам сотрудник: нетрудно понять, что он является другом всех своих друзей), выигравший в лотерее машину. Обязательно ли хотя бы два человека в этой компании вы-играли машины?
2. Известно, что в Авиаландии пять городов: Гирфорд, Вингбург, Фл-эпстон, Пайлот-Бэй и Фьюлтэнк. Из каждого города летает шесть авиарейсов, внутренних или международных. Докажите, что за гра-ницы Авиаландии летает четное количество авиарейсов.

− **7** −

2018 год, 5 класс

**Задача 3. Современная мебельная фабрика**

1. Восемь ящиков экспериментального письменного стола располо-жены по кругу. Каждый ящик может быть открыт или закрыт. Стол устроен так, что можно одновременно изменять состояние пары ящиков, между которыми ровно два других ящика — то есть мож-но либо открыть два сразу, либо закрыть два сразу, либо открыть один, закрыв другой.

У стола на витрине открыты два противоположных ящика. Пока-жите, как за 4 действия закрыть их оба.

1. В понедельник перед обедом обыкновенный мебельщик Сергей растворил пачку красителя для шкафов в десятилитровом ведре во-ды. В обед, обиженный на начальство фабрики, Федор в отчаянии вылил из емкости 4 литра раствора, долил 4 литра воды и тщатель-но размешал (чтобы замести следы).

На следующий день Сергей снова растворил пачку красителя в 10 литрах воды. На этот раз Федор вылил из ведра 2 литра раствора, долил 2 литра воды, тщательно размешал — и повторил ту же по-следовательность действий еще раз. В какой из дней в ведре оста-лось больше красителя?

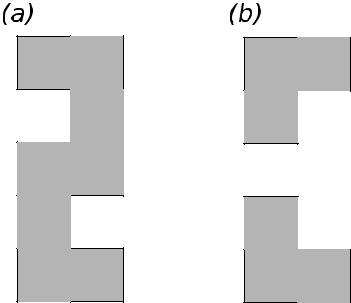
1. Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ров-но 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеет-ся). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше но-жек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

**Задача 4. Игры**

1. Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5 2018 фигуру, изображенную на рисунке 3*(a)* — при этом ее можно отра-жать и вращать. Проигрывает тот, кто не может вырезать фигуру в очередной раз. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

− **8** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»



1. Клетки прямоугольника 1 303 пронумерованы от 1 до 303 слева направо. В клетке №2 стоит фишка первого игрока, а в клетке №1 — второго игрока. Каждый игрок может делать ходы двух типов:

из клетки под номером *k* в клетку *k* + 1, если там не стоит фишка другого игрока,,

из клетки под номером *k* в клетку *k*+2*m*, если *m* — натуральное число и в клетке номер *k* + *m* сейчас стоит фишка другого игрока (то есть фишку соперника можно «перепрыгнуть»).

Выигрывает тот, чья фишка первой окажется в клетке № 303. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

1. Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4 4 уголки из трех клеток, причем первый может вырезать только уголки, ориен-тированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентирован-ные как буква L (см. рис. 3*(b)*). Проигрывает тот, кто не может выре-зать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная страте-гия?

**Задача 5. Прогрессивное сложение**

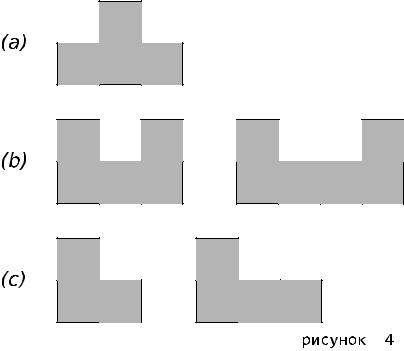
* свободных школах, не имеющих предрассудков, решили складывать числа, просто приписывая их друг к другу. Мы будем обозначать это дей-ствие значком : например, 2 2 = 22, 2000 2000 = 20002000.
* обычной жизни, в каком порядке числа ни складывай, результат оста-ется неизменным: 2+ 3+ 5 = 5+ 3+ 2. Однако, если выполнять с числами действие , результат может изменяться в зависимости от порядка чи-сел: 2 3 5 = 235 =*̸* 532 = 5 3 2.

− **9** −

2018 год, 6 класс

1. Даны числа 95 и 500. В каком порядке их нужно сложить, чтобы ре-зультат получился больше?
2. Даны три произвольных числа *P*, *Q*, *R*. В каком порядке нужно вы-полнять с ними действие, чтобы получить наибольший возмож-ный результат?
3. Бывает ли так, что *P* + *Q* *>* *P Q*?

**Задача 6. Мощения**



1. Укажите, как замостить плоскость фигурой с рисунка 4*(a)*.
2. Укажите способ, которым можно замостить плоскость каждой из двух фигур на ри-сунке 4*(b)*.
3. Можно ли сложить квадрат какого-либо размера из деревянных плиток в форме фигур, изображенных на рисунке 4*(c)*? При этом необходимо пользоваться плитками обеих форм.

**Задачи 6 класса**

**Задача 1. Клиренсы**

1. Диаметр колеса велосипеда — 74 см. На высоте центра колеса рас-положена *каретка* — узел, вокруг которого крутятся педали. Рас-стояние от каретки до педали — 175 мм. Каково минимальное рас-стояние от педали до земли (если на велосипеде едут по прямой, не наклоняясь)? Размерами педалей пренебречь.
2. Расстояние между соседними ножками стула — 50 см. К ножкам сту-ла прикрепили колесики и стали втаскивать его за веревку по стене
   * **10** −

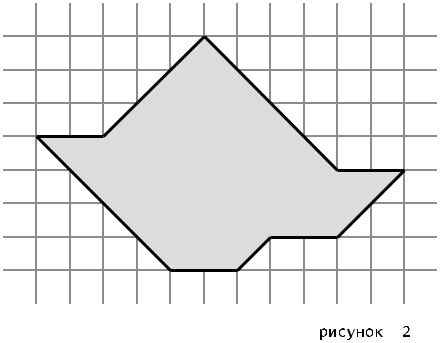
Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

Многоэтажного дома,который имеет форму куба, так, что стул едет по стене колесиками. Каково должно быть расстояние от сидения стула до земли, чтобы он смог въехать со стены многоэтажки на ее крышу, не поцарапав нижнюю сторону сиденья?

1. Автобус с диаметром колес 1 метр и колесной базой 10*:*5 метров (так называют расстояние между передней осью и задней) стоит на пла-нете Маленького принца, диаметр которой 20 метров. Каким дол-жен быть дорожный просвет (расстояние от пола до земли) у авто-буса, чтобы он не царапал днищем грунт?

**Задача 2. Разрезания**

1. Укажите, как разрезать произвольный квадрат на 7 многоугольни-ков, у которых одинаковы как площади, так и суммарные длины сторон, лежащих на границе исходного квадрата.
2. Укажите, как разрезать изображенную на рисунке 2 фигуру на 6 рав-ных фигур.

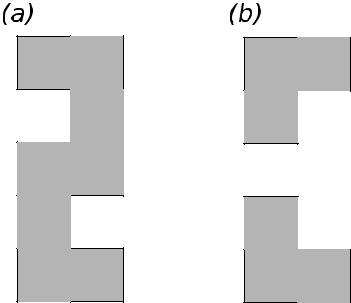


1. Представьте, что одну из египетских пирамид (египетские пирами-ды симметричны и имеют в основании квадрат) покрасили розовой краской (покрашены оказались ее четыре стороны, но не основа-ние). Как разрезать ее на три части одинакового объема, несущие на себе одинаковое количество краски?

**Задача 3. Игры**

1. Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5 2018 фигуру, изображенную на рисунке 3*(a)* — при этом ее можно отра-жать и вращать. Проигрывает тот, кто не может вырезать фигуру в очередной раз. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?
   * **11** −

2018 год, 6 класс



1. Клетки прямоугольника 1 303 пронумерованы от 1 до 303 слева направо. В клетке №2 стоит фишка первого игрока, а в клетке №1 — второго игрока. Каждый игрок может делать ходы двух типов:

из клетки под номером *k* в клетку *k* + 1, если там не стоит фишка другого игрока,,

из клетки под номером *k* в клетку *k*+2*m*, если *m* — натуральное число и в клетке номер *k* + *m* сейчас стоит фишка другого игрока (то есть, фишку соперника можно «перепрыгнуть»).

Выигрывает тот, чья фишка первой окажется в клетке № 303. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

1. Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4 4 уголки из трех клеток, причем первый может вырезать только уголки, ориен-тированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентирован-ные как буква L (см. рис. 3*(b)*). Проигрывает тот, кто не может выре-зать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная страте-гия?

**Задача 4. Модельки**

1. Вовочка подумал: «Если автомобиль „Жигули“ весит 1200 кг, а мама

подарила мне модельку масштаба 1 : 43, сделанную из тех же ма-териалов, что и полноценная машина, то моделька должна весить 1200*=*43 28 килограммов... Однако она ощутимо легче моего ко-та, про которого мама недавно сказала, что он толстый, потому что преодолел отметку в 6 кило. Где же логика?»

Помогите Вовочке разобраться — почему моделька на самом деле не так тяжела?

* + **12** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

1. В 1791 году единица длины **метр** была определена как одна сорокамиллионная часть Парижского меридиана. А в современном спорте популярно измерение не скорости, а *темпа* бегуна — сколько минут он тратит на преодоление километра.

Самый быстрый темп, которого умеет достигать моделька самолета — 0*:*54 мин/км. За сколько часов такая моделька долетит вдоль Парижского меридиана от Северного полюса до Южного и обрат-но?

1. Можно ли собрать из шестеренок такую систему, что в ней найдутся две шестеренки A и B и при вращении A в движение приводятся все остальные шестеренки, а при вращении B — нет?

**Задача 5. Напрасно называют север крайним**

1. Один коротышка с двумя ногами поехал кататься на велосипеде. Но

так как на дворе была зима, 10 градусов, он отморозил себе одну ногу. Другой коротышка через месяц поехал кататься на велосипе-де. Но на дворе по-прежнему была зима, уже 20 градусов, и он от-морозил себе все имеющиеся ноги (их также было две).

Сколько ног отморозит себе на 10- и на 20-градусном морозе тури-стическая группа из 40 коротышек? А их маленький серый кот, у которого ног изначально четыре? А речной рак, у которого восемь ног?

1. Барон Мюнхгаузен говорит, что обошел вокруг света (то есть побы-вал на всех возможных долготах Земного шара) за 40 минут. При этом известно, что он не лжет. Как такое могло произойти?
2. Однажды в стране Северной Болоторфии собрались построить до-роги. Каждый город решили соединить дорогой с тремя другими городами, самыми близкими к нему. Может ли статься так, что най-дутся города *A* и *B*, для которых, согласно указанному правилу, го-род *A* должен быть соединен с городом *B*, а город *B* с городом *A* — нет?

**Задача 6. Где-то я это уже видел**

1. Сколько дат в году могли бы оказаться на экране цифровых часов в качестве времени? *Например, 19* *июня* *— 19:06,* *а* *27* *ноября времени* *не соответствует.*
   * **13** −

2018 год, 6 класс

1. Сколько дат в году могли бы появиться на экране цифровых часов, если разрешено использовать сначала месяц, а потом день? *Напри-*

*мер, 27 ноября тогда будет соответствовать время 11:27.*

1. Автомобильный номер в Ленинградской области имеет вид

47 RUS

Вместо квадратиков стоят цифры, а вместо крестиков — буквы рус-ского алфавита, заглавные варианты которых похожи на какие-либо буквы английского алфавита (например, такие буквы — А, Т или У).

На скольких номерах в Ленинградской области есть ровно одна гласная? А ровно две гласных?

**Задача 7. Ужасный гадкий аккуратный подсче т**

1. Из клетчатой бумаги вырезали прямоугольник размером 4 5 кле-ток. Сколько на нем можно найти квадратов? А прямоугольников?
2. Круг разделен на *n* секторов одинакового размера. Сколькими спо-собами можно покрасить эти *n* секторов в *n* цветов, если две рас-краски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?
3. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зеленый, черный, жел-тый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трех горизонтальных цветных полос, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — бе-лый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?

**Задача 8. Фургончик**

1. Длины стен кузова нового фургона, который строит себе морожен-щик Саша, в метрах выражаются двумя различными простыми чис-лами. Известно, что если удлинить каждую из стен на 1 метр, пло-щадь фургона увеличится на 15 м2. Найдите размеры фургона.
2. В сашином фургоне родилась сороконожка (ее ноги пронумерова-ны от 1 до 40). Она хочет сделать первый шаг — и переставляет
   * **14** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

первую ногу. Вторым шагом она переставляет все ноги, номера ко-торых делятся на 2. Третьим — все ноги, номера которых делятся на 3 и которые не были переставлены ранее. Сколько ног ей теперь осталось переставить, чтобы окончательно сдвинуться с места?

1. Однажды утром мороженщик Саша отправился развозить мороже-ное на своем новом фургоне. Он обслуживает семь городов — *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *G* —и эти города в каком-то порядке стоят вдоль одногопрямого шоссе. Федя выехал из города *A* и проехал 18 километров до *B*. Потом — 10.5 километров до *C*. Затем — 27 километров до *D*, 15 километров до *E* и 19.5 километров до *F*. Наконец — 12 километров до *G*. Посмотрев вечером в атлас, Саша к своему удивлению узнал, что от *A* до *G* указано расстояние по шоссе, равное 41 км. Докажите, что информация в атласе неверна.

**Задачи 7 класса**

**Задача 1. Современная мебельная фабрика**

1. Восемь ящиков экспериментального письменного стола располо-жены по кругу. Каждый ящик может быть открыт или закрыт. Стол устроен так, что можно одновременно изменять состояние пары ящиков, между которыми ровно два других ящика — то есть мож-но либо открыть два сразу, либо закрыть два сразу, либо открыть один, закрыв другой.

У стола на витрине открыты два противоположных ящика. Пока-жите, как за 4 действия закрыть их оба.

1. В понедельник перед обедом обыкновенный мебельщик Сергей растворил пачку красителя для шкафов в десятилитровом ведре во-ды. В обед, обиженный на начальство фабрики, Федор в отчаянии вылил из емкости 4 литра раствора, долил 4 литра воды и тщатель-но размешал (чтобы замести следы).

На следующий день Сергей снова растворил пачку красителя в 10 литрах воды. На этот раз Федор вылил из ведра 2 литра раствора, долил 2 литра воды, тщательно размешал — и повторил ту же по-следовательность действий еще раз. В какой из дней в ведре оста-лось больше красителя?

− **15** −

2018 год, 7 класс

1. Экспериментальный стул с использованием нанотехнологий (одна из инноваций заключается, например, в том, что у такого стула ров-но 720 ножек) падает с лестницы (в качестве испытания, разумеет-ся). Выяснилось, что при падении он потерял в три раза меньше но-жек, чем у него бы осталось, потеряй он в три раза меньше ножек, чем у него осталось сейчас. Так сколько же ножек осталось у стула?

**Задача 2. Прогрессивное сложение**

* свободных школах, не имеющих предрассудков, решили складывать числа, просто приписывая их друг к другу. Мы будем обозначать это дей-

ствие значком : например, 2 2 = 22, 2000 2000 = 20002000.

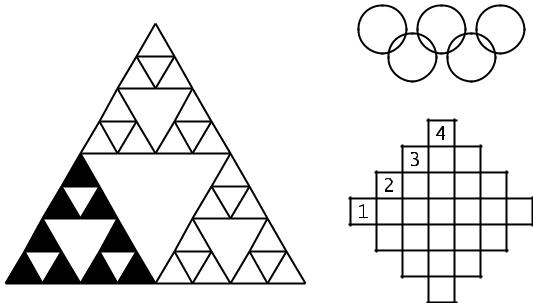
* обычной жизни, в каком порядке числа ни складывай, результат оста-ется неизменным: 2+ 3+ 5 = 5+ 3+ 2. Однако, если выполнять с числами действие, результат может изменяться в зависимости от порядка чи-

сел: 2 3 5 = 235 =*̸* 532 = 5 3 2.

* 1. Даны числа 95 и 500. В каком порядке их нужно сложить, чтобы ре-зультат получился больше?
  2. Даны три произвольных числа *P*, *Q*, *R*. В каком порядке нужно вы-полнять с ними действие , чтобы получить наибольший возмож-ный результат?
  3. Определим «прогрессивную разность»: *a* *⊖* *b* — это такое число *c*, что *b c* = *a* Приведите пример чисел *a* и *b* таких, что их разность *a ⊖ b* не определена(нужного числа *c* не найдется).

**Задача 3. На салфетке**

**A.**



− **16** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

Укажите, как нарисовать «одним росчерком пера», то есть не отры-вая ручки от бумаги и не проходя по одной линии дважды, (а) олим-пийские кольца (б) «наклонный квадрат» со стороной 4 (смотреть рисунок 5).

1. Треугольник Серпинского степени 1 — это просто треугольник. Что-бы получить треугольник Серпинского степени *n* + 1, нужно поста-вить «друг на друга» три треугольника Серпинского степени *n*. На рисунке 5 изображен треугольник Серпинского степени 4, а выделен треугольник Серпинского степени 3. Посчитайте, сколь-ко узлов (точек, где пересекаются два и более непараллельных от-резка) в треугольнике Серпинского степени *n*. Посчитайте также, сколько отрезков длины 1 составляют «наклонный квадрат» со сто-роной *n*.
2. Укажите, как нарисовать одним росчерком пера треугольник Сер-пинского степени 4, изображенный на рисунке.

**Задача 4. Не модельная, а модальная!**

Пусть есть событие *X*, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие *X* = «сего-дня суббота» случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

Имеются два символа, и ▽, которые рассказывают что-то о разных со-бытиях. Так, фраза « *X*» означает «начиная с сегодняшнего дня каждый день случается событие *X*». Фраза «▽*X*» означает «в будущем найдется день, когда случится событие *X*».

Два символа, упомянутых нами, можно комбинировать. Легко понять, что фраза «▽ *X*» значит «в будущем найдется день, начиная с которого ежедневно будет происходить событие *X*». А фраза « *X*» значит то же самое, что и « *X*» (убедитесь в этом сами). Фразы, значащие одно и то же, будем называть эквивалентными.

1. Верно ли утверждение « ▽ сегодня суббота»? Что вообще значит фраза « ▽*X*»?
2. Докажите, что фразы « ▽ *X*» и «▽ *X*» эквивалентны.
3. Сколько вообще существует попарно неэквивалентных фраз вида «\_*X*» (вместо подчеркивания стоит последовательность из символов

и ▽)?

* + - **17** −

2018 год, 7 класс

**Задача 5. Без пробуксовки**

1. Легковая машина с колесной базой (так называют расстояние меж-ду передней и задней осью) 5 метров повернула переднее левое ко-лесо на 30*◦* влево, при этом заднее левое колесо осталось в исход-ном положении, а правые колеса повернулись так, чтобы машина могла ездить без пробуксовки. С повернутыми таким образом ко-лесами машина стала ездить по окружности. По окружности какого радиуса ездит заднее левое колесо?
2. Погрузчик в супермаркете с колесной базой 1*:*8 метра повернул пе-реднее левое колесо на 45*◦* влево, а заднее левое — на столько же в противоположном направлении. Остальные колеса повернулись так, чтобы погрузчик мог ездить без пробуксовки. С повернуты-ми таким образом колесами погрузчик стал ездить по окружности. Укажите точку, вокруг которой он ездит.
3. Расстояние между передней и средней осью трехосного автобуса — 9 метров, а между средней и задней — 3 метра. Переднее левое коле-со повернулось на 60*◦* влево, среднее левое осталось в прямом по-ложении. На сколько градусов и куда нужно повернуться заднему левому колесу, чтобы автобус смог поехать без пробуксовки?

**Задача 6. Как провожают транспортеры...**

Транспортером будем называть движущуюся ленту, на которой можно перемещать предметы (все видели такую на кассе в «Пятерочке»,, еще ее можно сравнить с траволатором на ст. м. «Спортивная»).

1. Если транспортер движется со скоростью *v* м/с, то лежащий на нем питон проезжает мимо неподвижного наблюдателя за 14 секунд. Давайте возьмем питона–детеныша (его длина составляет 34 от дли-ны взрослого питона), в шесть раз более медленный транспортер, а также заставим наблюдателя идти со скоростью 13 *v* м/с навстре-чу транспортеру. За какое время детеныш питона пронесется мимо наблюдателя?
2. Два кубика размером 5 5 5 см едут по транспортеру, причем расстояние между ними равняется 10 см. С данного транспортера они попадают на следующий, в два раза более быстрый, и дальше едут по нему. Каково расстояние между ними теперь?

− **18** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

1. В отдел приема песка фабрики «Веселый Песочник» привезли 1‘200 кг песка. Из отдела приема в отдел первичной очистки на фабрике идет два транспортера: один переносит 500 граммов песка в се-кунду, а другой, новый, — 1 кг песка в секунду. Как поделить песок между этими двумя транспортерами так, чтобы перевезти весь пе-сок из одного отдела в другой за наименьшее время?

**Задача 7. Одновременное вычитание**

1. На доске написаны пять чисел, сумма которых делится на три. Раз-решается одновременно уменьшать на единицу три из написанных на доске чисел. Всегда ли можно добиться того, чтобы на доске в итоге оказалось пять нулей?
2. На плоскости расположено несколько точек, каждой из которых приписан *вес* — целое число. При этом известно, что сумма весов всех точек равна нулю. Точки можно соединять кривыми, у каждой из которых есть *цена*. Если две точки соединены кривой с ценой *w* (*w* — целое число), то к весу одной из них прибавляется *w*, а из веса другой вычитается *w* (куда именно прибавлять, а откуда вычитать, можно решать самому). Докажите, что можно соединить точки кри-выми с какими-то ценами так, чтобы веса всех точек оказались ну-левыми.
3. В стране несколько городов, между ними проложены дороги. Для каждой дороги указаны направление (все дороги односторонние) и *вес* — натуральное число. Известно, что для каждого города сум-ма весов входящих в него дорог равна сумме весов исходящих. До-кажите, что несколько машин (на номере каждой из которых на-писано натуральное число) могли проехать каждая по кругу через несколько городов так, что вес каждой дороги оказался равен сум-ме номеров машин, побывавших на ней.

**Задача 8. Сетки на плоскости**

1. Если замостить плоскость равносторонними треугольниками одно-го размера, то их стороны образуют треугольную сетку (в ее форме также обычно строят карточные домики). В треугольной сетке есть три направления ребер — они соответствуют сторонам складывае-мых треугольников. Докажите, что любой кратчайший путь по тре-

− **19** −

2018 год, 7 класс

угольной сетке от одного ее узла к другому использует ребра мак-симум двух направлений из трех.

1. В деревне Малые Пауки поставили поперек реки рыболовную сеть с квадратными ячейками, размером *m n* ячеек. Окунь Виталий уме-ет сгрызать узлы в сетке, но, так как вода мутная, он не видит, ка-кой именно узел грызет, то есть каждый раз выгрызает случайный из узлов. Сколько узлов ему нужно сгрызть, чтобы сетка гарантиро-ванно развалилась хотя бы на две части?
2. Завхоз офисного здания, на третьем этаже которого есть бесконеч-но длинный и бесконечно широкий коридор, заказал в ООО „Стран-ные ванные“ бесконечно много четырехугольных кафельных пли-ток одинаковой формы и размера (при этом четырехугольник не обязан быть ни прямоугольником, ни даже выпуклым). Докажите, что какой бы формы ни были плитки, ими все равно можно покрыть весь пол в коридоре.

**Задача 9. Ужасный гадкий аккуратный подсчет**

1. Круг разделен на *n* секторов одинакового размера. Сколькими спо-собами можно покрасить эти *n* секторов в *n* цветов, если две рас-краски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?
2. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зеленый, черный, жел-тый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трех горизонтальных цветных полос, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — бе-лый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?
3. Дан кубик. Сколькими способами можно покрасить его грани в 6 цветов (по одному на грань), если две раскраски, получаемые друг из друга вращением кубика, считаются одинаковыми?

**Задача 10. Средние арифметические**

Напомним: среднее арифметическое набора чисел *a*1 *: : :* *an* вычисляется по формуле

− **20** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

*a*1+ *: : :* + *an :*

*n*

1. Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы наи-большее из средних арифметических этих наборов было больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.
2. В первый класс школы №265 поступило 120 детей ростом соответ-ственно 101, 102, 103 … 220 сантиметров. Завуч хочет распреде-лить их на 4 класса по 30 человек так, чтобы, если в каждом классе взять рост самого низкого ученика, среднее арифметическое полу-ченных четырех чисел было наибольшим. Как ему это сделать?
3. В первый класс школы №235 поступило 80 детей ростом соответ-ственно 51, 52, 53 … 130 сантиметров. Завуч хочет распределить их на 4 класса по 20 человек так, чтобы, если в каждом классе взять средний арифметический рост его учеников, минимум полученных четырёх чисел был наибольшим. Как ему это сделать?

**Задачи 8 класса**

**Задача 1. У магазина**

1. Два продавца в магазине, Федор и Кирилл, увеличивают все числа, которые называют, в несколько раз.

**Федор:** Кирилл умножает числа, которые произносит, на 144, такчто не паникуйте, обсуждая с ним цены.

**Кирилл:** А ты когда вчера сказал, что учебник истории стоит 43200рублей, покупатели в обморок упали!

**Игорь Евгеньевич, директор магазина:** Забавно ссоритесь! При-чем если спросить у вас, сколько стоит учебник, вы скажете одну и ту же сумму.

Так во сколько же раз увеличивают числа продавцы — и сколько стоит учебник по истории?

1. Злоумышленник пришел на парковку магазина и затер по одной цифре на номерном знаке каждой из стоящих там машин. Он не знал, что числа на всех номерах машин в стране делятся на 99. До-кажите, что даже после его пакостей можно однозначно восстано-вить стертую цифру на номере каждой машины.
   * **21** −

2018 год, 8 класс

1. Покупатель и продавец в магазине торгуются: покупатель хочет ку-пить товар по одной цене, а продавец — продать по другой (причем не обязательно продавец называет бóльшую сумму,, ему важнее не получить больше прибыли, а настоять на своем). Цены, конечно же, целые и неотрицательные. Торг происходит так: если сумма, на-званная продавцом, больше названной покупателем, то он вычи-тает из своей цены покупательскую и соглашается продать товар за получившееся число. В противном случае покупатель вычитает из своей цены сумму, на которой хочет сойтись продавец, и теперь готов купить товар за эту цену. Так происходит, пока один из участ-ников торга не назовет нулевую цену.

(а) Любой ли торг завершится? (б) Покупатель и продавец называ-ют цены, не превосходящие 20. При каких значениях цен торг будет наиболее долгим?

**Задача 2. Ужасный гадкий аккуратный подсчёт**

1. Круг разделён на *n* секторов одинакового размера. Сколькими спо-собами можно покрасить эти *n* секторов в *n* цветов, если две рас-краски, получающиеся друг из друга вращением круга, считаются одинаковыми?
2. Есть шесть цветов — красный, белый, синий, зелёный, чёрный, жёл-тый. Нам хочется составить из них всевозможные триколоры (то есть флаги, состоящие из трёх горизонтальных цветных полос, как российский или немецкий). При этом если рядом оказываются две полосы одного цвета, они сливаются в одну, поэтому такой флаг не считается триколором. А вот флаг вроде «белый — синий — бе-лый» — считается. Так сколько же триколоров можно составить?
3. Дан кубик. Сколькими способами можно покрасить его грани в 6 цветов (по одному на грань), если две раскраски, получаемые друг из друга вращением кубика, считаются одинаковыми?

**Задача 3. Не модельная, а модальная!**

Пусть есть событие *X*, которое может происходить или не происходить в зависимости от того, какой сегодня день. Например, событие *X* = «сего-дня суббота» случается раз в семь дней, а событие «сегодня я смотрел на часы» — каждый день.

− **22** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

Имеются два символа, и ▽, которые рассказывают что-то о разных со-бытиях. Так, фраза « *X*» означает «начиная с сегодняшнего дня каждый день случается событие *X*». Фраза «▽*X*» означает «в будущем найдётся день, когда случится событие *X*».

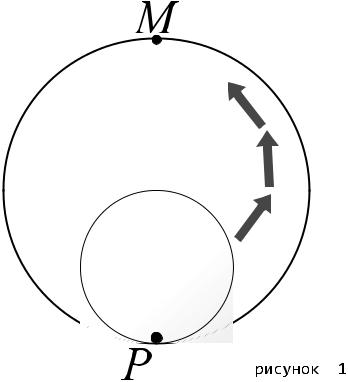
Два символа, упомянутых нами, можно комбинировать. Легко понять, что фраза «▽ *X*» значит «в будущем найдётся день, начиная с которого ежедневно будет происходить событие *X*». А фраза « *X*» значит то же самое, что и « *X*» (убедитесь в этом сами). Фразы, значащие одно и то же, будем называть эквивалентными.

1. Верно ли утверждение « ▽ сегодня суббота»? Что вообще значит фраза « ▽*X*»?
2. Докажите, что фразы « ▽ *X*» и «▽ *X*» эквивалентны.
3. Сколько вообще существует попарно неэквивалентных фраз вида «\_*X*» (вместо подчёркивания стоит последовательность из символов

и ▽)?

**Задача 4. Катим круг**

* «нижней» точке *P* окружности радиуса *R* ее касается круг радиуса *R*2 , «нижняя» точка которого, в свою очередь, отмечена (см. рисунок). Круг начинают «вкатывать» вверх по окружности так, что в точке соприкос-новения они никогда не скользят друг относительно друга.



1. Докажите, что когда круг проедет пол-оборота по окружности и бу-дет касаться ее в точке *M*, то его отмеченная точка окажется там же, в точке *M*.

− **23** −

2018 год, 8 класс

1. Докажите, что в любой момент времени точка касания круга с ок-ружностью и отмеченная точка круга находятся на одной горизон-тальной прямой.
2. Докажите, что отмеченная точка перемещается строго по верти-кальному отрезку.

**Задача 5. Средние арифметические**

Напомним: среднее арифметическое набора чисел *a*1 *: : :* *an* вычисляется по формуле

*a*1+ *: : :* + *an :*

*n*

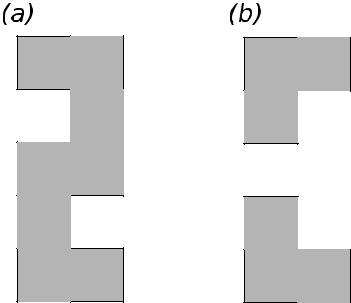
1. Придумайте четыре набора по пять чисел каждый так, чтобы наи-большее из средних арифметических этих наборов было больше, чем среднее арифметическое наибольших чисел этих наборов.
2. В первый класс школы №265 поступило 120 детей ростом соответ-ственно 101, 102, 103, …, 220 сантиметров. Завуч хочет распреде-лить их на 4 класса по 30 человек так, чтобы, если в каждом классе взять рост самого низкого ученика, среднее арифметическое полу-ченных четырёх чисел было наибольшим. Как ей это сделать?
3. В первый класс школы №235 поступило 80 детей ростом соответ-ственно 51, 52, 53, …, 130 сантиметров. Завуч хочет распределить их на 4 класса по 20 человек так, чтобы, если в каждом классе взять средний арифметический рост его учеников, минимум полученных четырёх чисел был наибольшим. Как ей это сделать?

**Задача 6. Игры**

1. Двое по очереди вырезают из клетчатого прямоугольника 5 2018 фигуру, изображенную на рисунке 3*(a)* — при этом ее можно отра-жать и вращать. Проигрывает тот, кто не может вырезать фигуру в очередной раз. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

− **24** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»



1. Клетки прямоугольника 1 303 пронумерованы от 1 до 303 слева направо. В клетке №2 стоит фишка первого игрока, а в клетке №1 — второго игрока. Каждый игрок может делать ходы двух типов:

из клетки под номером *k* в клетку *k* + 1, если там не стоит фишка другого игрока,,

из клетки под номером *k* в клетку *k*+2*m*, если *m* — натуральное число и в клетке номер *k* + *m* сейчас стоит фишка другого игрока (то есть фишку соперника можно «перепрыгнуть»).

Выигрывает тот, чья фишка первой окажется в клетке № 303. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

1. Двое по очереди вырезают из клетчатого квадрата 4 4 уголки из трёх клеток, причём первый может вырезать только уголки, ориен-тированные как буква Г, а второй — только уголки, ориентирован-ные как буква L (см. рис. 3*(b)*). Проигрывает тот, кто не может выре-зать очередной уголок. У кого из игроков есть выигрышная страте-гия?

**Задача 7. Об одной задаче классификации**

1. Полосой будем называть часть плоскости, заключенную между дву-мя параллельными прямыми. Ширина полосы — расстояние меж-ду ограничивающими ее прямыми. Пусть на плоскости даны два непересекающихся круга. Покажите, как с помощью линейки без делений и циркуля отделить их друг от друга полосой максималь-ной ширины.
2. В условиях пункта A отделите полосой максимальной ширины два непересекающихся одинаково ориентированных квадрата на плос-кости.
   * **25** −

2018 год, 8 класс

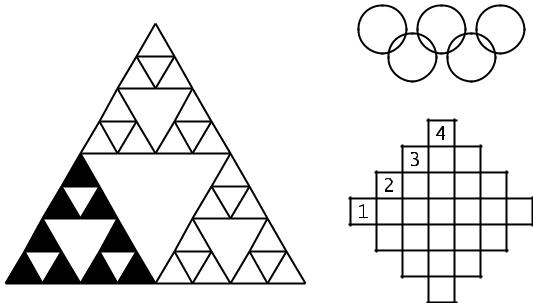
1. В условиях пункта A отделите полосой максимальной ширины два произвольных квадрата на плоскости.

**Задача 8. Одновременное вычитание**

1. На доске написаны пять чисел, сумма которых делится на три. Раз-решается одновременно уменьшать на единицу три из написанных на доске чисел. Всегда ли можно добиться того, чтобы на доске в итоге оказалось пять нулей?
2. На плоскости расположено несколько точек, каждой из которых приписан *вес* — целое число. При этом известно, что сумма весов всех точек равна нулю. Точки можно соединять кривыми, у каждой из которых есть *цена*. Если две точки соединены кривой с ценой *w* (*w* — целое число), то к весу одной из них прибавляется *w*, а из веса другой вычитается *w* (куда именно прибавлять, а откуда вычитать, можно решать самому). Докажите, что можно соединить точки кри-выми с какими-то ценами так, чтобы веса всех точек оказались ну-левыми.
3. В стране несколько городов, между ними проложены дороги. Для каждой дороги указаны направление (все дороги односторонние) и *вес* — натуральное число. Известно, что для каждого города сум-ма весов входящих в него дорог равна сумме весов исходящих. До-кажите, что несколько машин (на номере каждой из которых на-писано натуральное число) могли проехать каждая по кругу через несколько городов так, что вес каждой дороги оказался равен сум-ме номеров машин, побывавших на ней.

**Задача 9. На салфетке**

**A.**



− **26** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

Укажите, как нарисовать «одним росчерком пера», то есть не отры-вая ручки от бумаги и не проходя по одной линии дважды, (а) олим-пийские кольца (б) «наклонный квадрат» со стороной 4 (смотреть рисунок 5).

1. Треугольник Серпинского степени 1 — это просто треугольник. Что-бы получить треугольник Серпинского степени *n* + 1, нужно поста-вить «друг на друга» три треугольника Серпинского степени *n*. На рисунке 5 изображён треугольник Серпинского степени 4, а цветом выделен треугольник Серпинского степени 3. Посчитайте, сколь-ко узлов (точек, где пересекаются два и более непараллельных от-резка) в треугольнике Серпинского степени *n*. Посчитайте также, сколько отрезков длины 1 составляют «наклонный квадрат» со сто-роной *n*.
2. Укажите, как нарисовать одним росчерком пера треугольник Сер-пинского степени 4, изображённый на рисунке.

**Задача 10. Необходимости и достаточности**

1. Длина тела мышки — 10 сантиметров, а кошки — 55 сантиметров. Мышка пробегает 35 своих тел за секунду, а кошка — всего 9 своих тел за секунду. Догонит ли кошка мышку?
2. На одном болоте живут 100 ужасных Йожинов. Председатель ре-шил, что с этой ситуацией надо наконец разобраться — обезвре-дить Йожинов и продать их в зоопарк. Известно, что Йожина мож-но обезвредить, только скинув на него с самолета порошок. Предсе-дателю нужно выбрать, какой самолет использовать: винтовой или реактивный.

Винтовой самолет за один вылет осыпает порошком двух Йожинов, но, чтобы окончательно обезвредить одного Йожина, нужно осы-пать его трижды. Реактивный самолет в силу более высокой скорости за один вылет осыпает порошком 5 Йожинов, но, так как на каждого Йожина теперь попадает меньше порошка, для обезвре-живания его нужно осыпать восемь раз.

Какой же самолет эффективнее: какому потребуется меньше выле-тов, чтобы обезвредить всех Йожинов?

1. Несколько велосипедистов отправились в поход. За обедом они в сумме съедают 2 килограмма еды плюс 0.1 кг за каждый килограмм
   * **27** −

2018 год, 8 класс

еды, который они везли на себе до этого. Например, если у них было 10 килограммов еды на всех, то на ближайшем обеде они съедят 2 + 0*:*1 10 = 3 килограмма, а на следующем — 2 + 0*:*1 (10 3) = 2*:*7 килограммов. В походе планируется 30 обедов (велосипедисты не завтракают и не ужинают). Сколько еды им нужно взять с собой, чтобы ее хватило на весь поход (и в конце похода не осталось ничего лишнего)?

**Задача 11. Рукопожатия**

**A.** Тридцать пять восьминогих существ— 18крабов и17пауков—встали в хоровод, имеющий форму восьмёрки. Это значит, что су-щество, стоящее в центре этой восьмёрки, держит за лапы четве-рых своих соседей (благо, лап у него восемь, ему хватит). Известно, что каждый краб держится за лапы исключительно с пауками. Кто стоит в центре восьмёрки — краб или паук?

1. В компании работает двадцать шесть человек, и каждый дружит ровно с пятью другими. После подведения итогов государственной лотереи оказалось, что у каждого сотрудника найдётся друг или же друг его друга (это может быть и сам сотрудник: нетрудно понять, что он является другом всех своих друзей), выигравший в лотерее машину. Обязательно ли хотя бы два человека в этой компании вы-играли машины?
2. Известно, что в Авиаландии пять городов: Гирфорд, Вингбург, Фл-эпстон, Пайлот-Бэй и Фьюлтэнк. Из каждого города летает шесть авиарейсов, внутренних или международных. Докажите, что за гра-ницы Авиаландии летает чётное количество авиарейсов.

**Задача 12. Прогрессивное сложение**

* свободных школах, не имеющих предрассудков, решили складывать числа, просто приписывая их друг к другу. Мы будем обозначать это дей-

ствие значком : например, 2 2 = 22, 2000 2000 = 20002000.

* обычной жизни, в каком порядке числа ни складывай, результат оста-ётся неизменным: 2+ 3+ 5 = 5+ 3+ 2. Однако, если выполнять с числами действие , результат может изменяться в зависимости от порядка чи-

сел: 2 3 5 = 235 =*̸* 532 = 5 3 2.

− **28** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

1. Даны числа 95 и 500. В каком порядке их нужно сложить, чтобы ре-зультат получился больше?
2. Даны три произвольных числа *P*, *Q*, *R*. В каком порядке нужно вы-полнять с ними действие , чтобы получить наибольший возмож-ный результат?
3. Определим «прогрессивную разность»: *a* *⊖* *b* — это такое число *c*, что *b c* = *a* Приведите пример чисел *a* и *b* таких, что их разность *a ⊖ b* не определена(нужного числа *c* не найдётся).

**Задачи профильного варианта 7 класса**

**Задача 1. Римская десятичная система счисления**

*Интеллект человечества поддерживают лишь те неудобства, которые оно себе создает.*

Давайте добавим в знакомую нам десятичную систему счисления немно-го Древнего Рима. Значение числа по его записи мы теперь будем вос-станавливать так: начиная с самого правого разряда, сравниваем *k*-ю цифру числа с *k* + 1-й — и если более старшая цифра оказывается не меньше, то мы прибавляем к результату умножения ее на соответствую-щую степень десятки число, которое получено нами при «раскодирова-нии» первых *k* разрядов,, в противном же случае — вычитаем это число.

Приведем несколько примеров. Записи «742» будет соответствовать чис-ло 700 + 40 + 2, в то время как записи «342» — число 300 (40 + 2) = 258 (так как 3 *<* 4).

Записи «6342» соответствует число 6300 42 = 6258, а записи «2342» — число 2000 (300 (40 + 2)) = 1742 (здесь сразу 2 *<* 3 и 3 *<* 4). Записи «55» соответствует число 55.

Чтобы не запутаться, будем обозначать через *S*Д число, соответствующее строке *S*, если воспринимать ее как запись в традиционной десятичной системе счисления, а через *S*Р — число, соответствующее строке *S*, если воспринимать ее как запись в «римской» десятичной системе счисления. Иными словами,

2342Р = 1742Д = одна тысяча семьсот сорок два *2* N*:*

− **29** −

2018 год, 7 класс

1. Какие числа соответствуют следующим записям: 333Р, 2050Р, 10001Р, 404004Р?
2. Перевести десятичные числа в десятичную римскую систему счис-ления (знак «минус» в десятичной римской системе счисления не используется!): 91Д, 150Д, 1Д, 13Д.
3. Опишите все *S* такие, что *S*Д = *S*Р.
4. Предложите алгоритм построения по **двузначному** положительно-му десятичному числу (то есть, имеющему вид *xy*Д) его десятичной римской записи.
5. Пусть *X*Д = *Y*Р = *N*. Какая десятичная римская запись будет соот-

ветствовать числу 10 *N*? Числу *N*?

1. Приведите пример числа *N* такого, что есть две **различных** строки *S*, *T*,для которых выполнено условие

*S*Р= *T*Р= *N:*

1. Может ли у одного числа быть строго больше двух различных деся-тичных римских записей?
2. Придумайте признаки делимости на 2, на 5, на 3 в десятичной рим-ской системе счисления.
3. Пусть *Y*Р = *N* *>* 0. Верно ли в десятичной римской системе нера-

венство

*Y*Д

4 *< N* *Y*Д?

**10. *А был ли мальчик?*** Можно ли вообще считать«десятичную рим-скую систему» системой счисления? Покажите, что, строго говоря, нет: приведите пример числа *M* *2* N, которому не соответствует ни одной десятичной римской записи.

**Задача 2. Изображения на плоскости**

*«Алгоритм Тарского, да? :)*

* данной задаче нас будет интересовать возможность представить мно-жество точек на плоскости как множество решений какого-либо уравне-

ния или неравенства. Например, уравнение *x* *y* =0задает прямую с

− **30** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

углом наклона 45*◦*, а неравенство *min*(*x;* *y*) 0 — первую координатную четверть.

При составлении неравенств и уравнений вам разрешено пользоваться арифметическими действиями — сложением, умножением, вычитани-ем, делением,, функцией модуля — *j* *: : :* *j*, а также max и min — взятием наибольшего и наименьшего значений из конечного набора чисел.

1. Докажите, что

(а) *A B* *>* 0 тогда и только тогда, когда числа *A* и *B* одного знака,,

( )

(б) min(*x;* *y*) = 1 *x* + *y* *j* *x* *yj* ,,

2

(в) Даны числа *a*1 *<* *a*2 *< : : : <* *an*. Докажите, что если *ak* *<* *x* *<* *ak*+1,то знак выражения

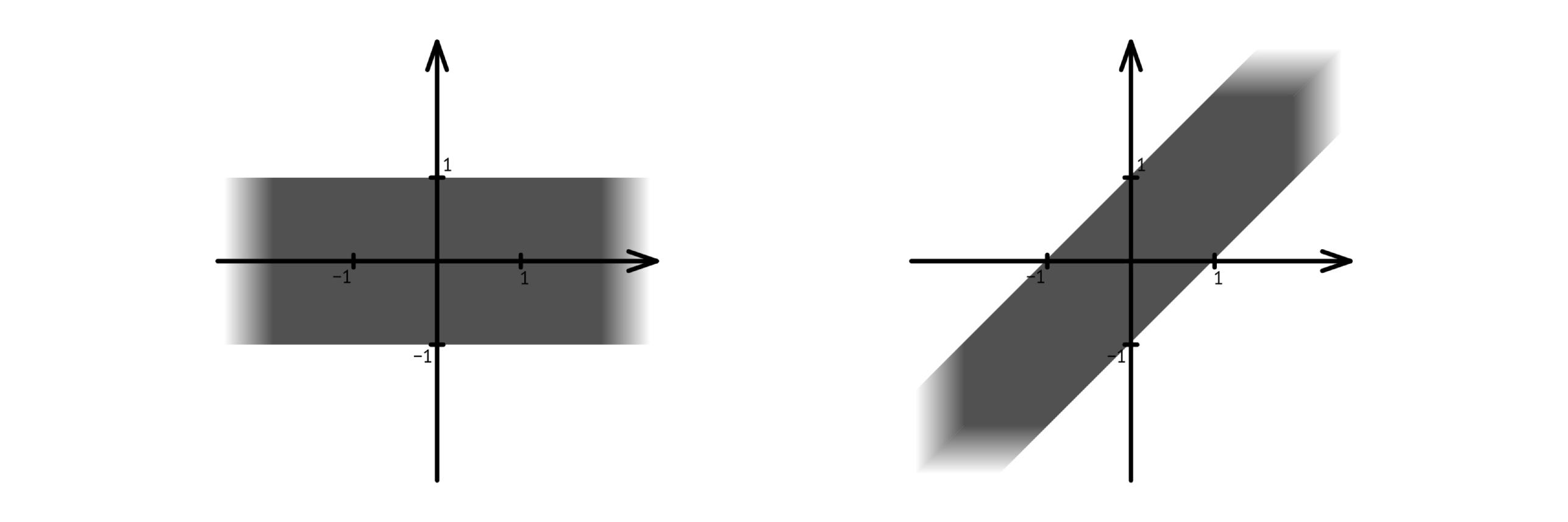
(*x* *a*1) (*x a*2) *: : :* (*x an*)

совпадает со знаком выражения ( 1)*n* ( 1)*k*.

1. Изобразите множество точек (*x;* *y*) на плоскости, удовлетворяющих неравенству

max(*jxj;* *jyj*) 1*:*

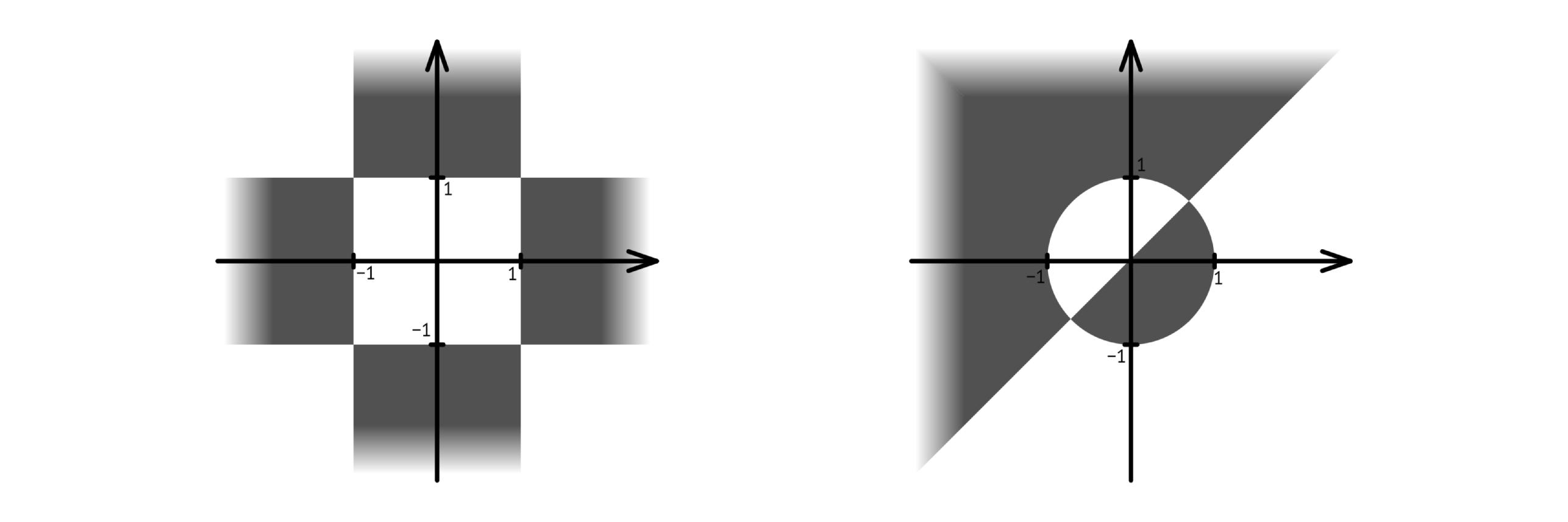
1. Множеством решений какого неравенства является (а) горизон-тальная полоса на плоскости (б) наклонная полоса на плоскости (смотреть рисунок)?



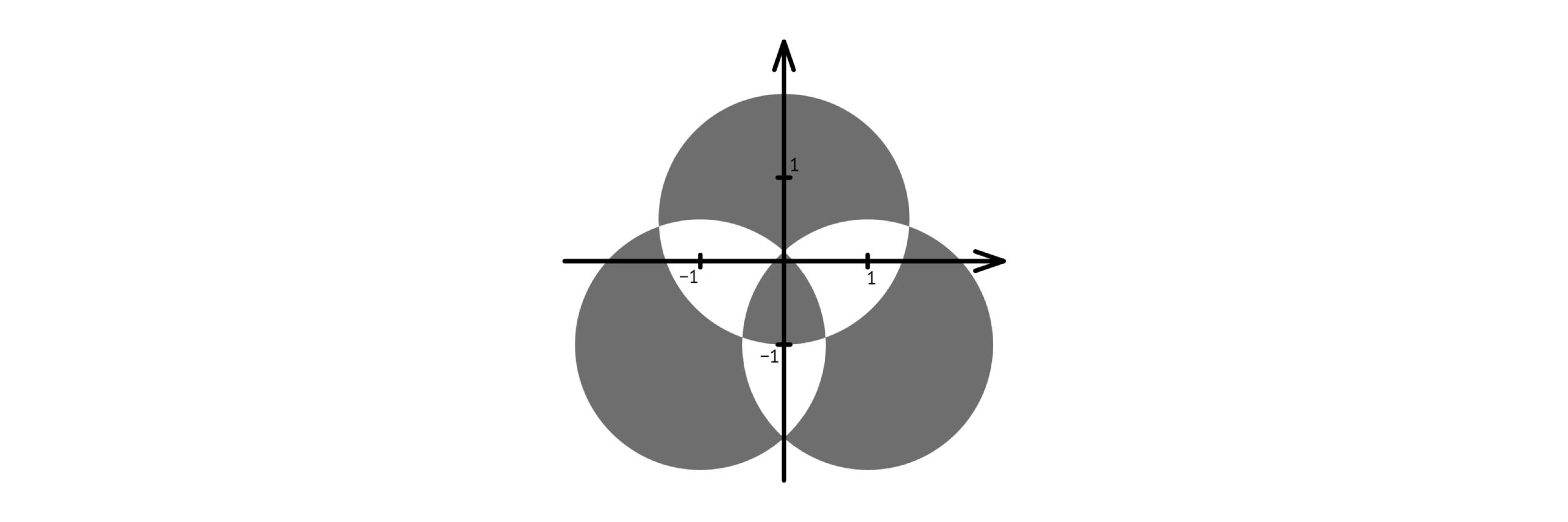
1. Множеством решений какого неравенства является (а) «крестик» на плоскости (б) фигура, полученная из круга и полуплоскости (смот-реть рисунок)?

− **31** −

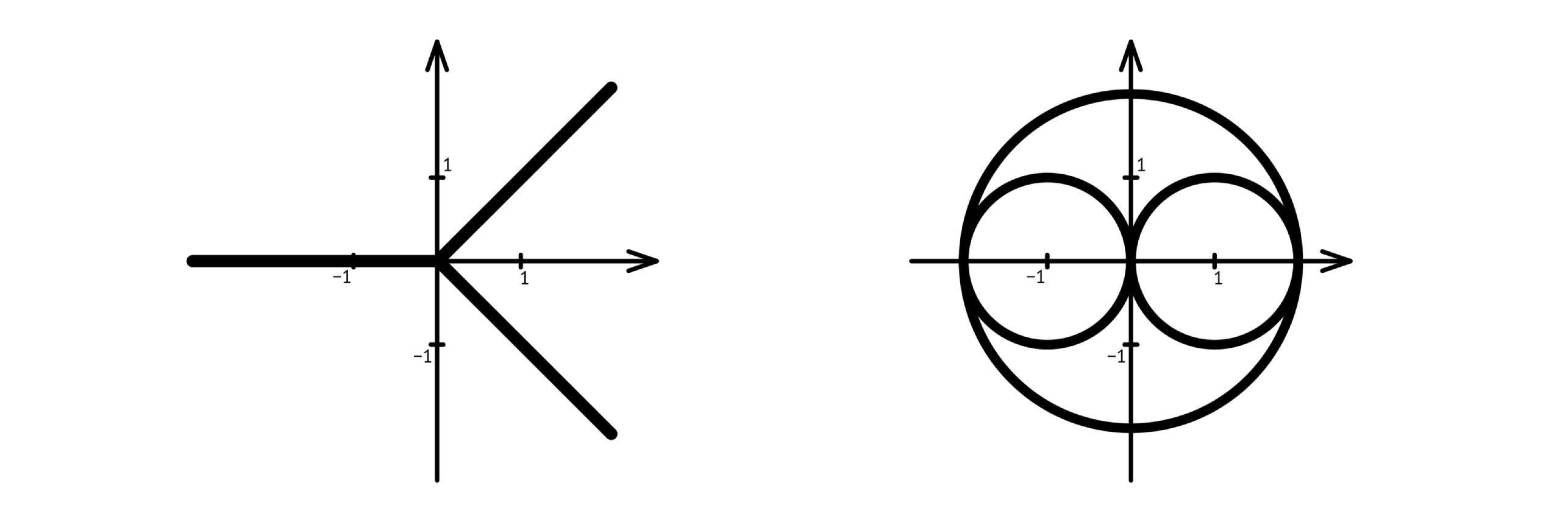
2018 год, 7 класс



1. Множеством решений какого неравенства является фигура (смот-реть рисунок), полученная из трех кругов радиуса 1*:*5 с центрами в точках (1*;* 1), ( 1*;* 1), (0*;* 0*:*5)?



1. Множеством решений какого уравнения является (а) фигура из трёх окружностей (б) фигура из трёх лучей (смотреть рисунок)?



1. Пусть фигура *F*1 — множество решений уравнения *P*1(*x;* *y*) = 0, а *F*2 — множество решений уравнения *P*2(*x;* *y*) = 0. Приведите уравнение,

− **32** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

решения которого образуют (а) пересечение фигур *F*1 и *F*2 (б) объ-единение фигур *F*1 и *F*2?

1. Пусть фигура *F*1 — множество решений неравенства *P*1(*x;* *y*) *<* 0, а *F*2—множество решений неравенства *P*2(*x; y*) *<* 0.Приведите нера-венства, решения которого образуют (а) пересечение фигур *F*1 и *F*2 (б) объединение фигур *F*1 и *F*2 (в) множество точек, лежащих либо в фигуре *F*1, либо в фигуре *F*2, но не в них обеих одновременно?

**Задача 3. Простеющие числа**

Рассмотрим число 12. Среди чисел меньших, чем 12, взаимно просты с ним следующие:

1*;* 5*;* 7*;* 11*:*

Все они, кроме единицы, являются простыми. А вот среди чисел, мень-ших 10 и взаимно простых с 10, есть, например, 9 — составное число. Итак, число называется *простеющим*, если все числа, меньшие его и вза-имно простые с ним, — 1 или простые. Как мы выяснили, 12 — простею-щее число, а 10 — нет.

1. Приведите примеры других простеющих чисел, кроме 12.
2. Перечислите все нечетные простеющие числа.
3. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 3.
4. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 5.
5. Докажите, что число вида *p*2 + 1, где *p* — простое, не может быть простеющим.
6. Докажите, что если *n* *>* *p*1 *p*2, *p*1 и *p*2 — простые числа, и *n* не делится ни на *p*1, ни на *p*2, то оно

не может быть простеющим.

1. Докажите, что всякое простеющее число имеет вид *p* + 1, где *p* — какое-то простое.
2. Бесконечно ли множество простеющих чисел?

− **33** −

2018 год, 8 класс

**Задачи профильного варианта 8 класса**

**Задача 1. Простеющие числа**

Рассмотрим число 12. Среди чисел, меньших, чем 12, взаимно просты с ним следующие:

1*;* 5*;* 7*;* 11*:*

Все они, кроме единицы, являются простыми. А вот среди чисел, мень-ших 10 и взаимно простых с 10, есть, например, 9 — составное число.

Итак, число называется *простеющим*, если все числа, меньшие его и вза-имно простые с ним — 1 или простые. Как мы выяснили, 12 — простею-щее число, а 10 — нет.

1. Приведите примеры других простеющих чисел, кроме 12.
2. Перечислите все нечётные простеющие числа.
3. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 3.
4. Перечислите все простеющие числа, не делящиеся на 5.
5. Докажите, что число вида *p*2 + 1, где *p* — простое, не может быть простеющим.
6. Докажите, что если *n* *>* *p*1 *p*2, *p*1 и *p*2 — простые числа, и *n* не делится ни на *p*1, ни на *p*2, то оно

не может быть простеющим.

1. Докажите, что всякое простеющее число имеет вид *p* + 1, где *p* — какое-то простое.
2. Бесконечно ли множество простеющих чисел?

− **34** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

**Задача 2. Расстояние между множествами**

*«Знаете, как на русский язык переводится фамилия „Хаусдорф“? Домик в деревне!»*

* данной задаче мы рассматриваем **только** конечные множества точек на плоскости, которые всегда будем обозначать буквами *A*, *B*, *C*. Плос-кость замечательна тем, что на ней определено расстояние между точ-ками dist (*x;* *y*) — его можно мыслить как длину кратчайшего отрезка, со-единяющего *x* и *y*. Напомним три основных свойства расстояния между точками:
  + dist (*x;* *y*) = dist (*y;* *x*),,
  + dist (*x;* *y*) = 0 тогда и только тогда, когда *x* = *y*,,
  + Для всех *x*, *y*, *z* выполнено «неравенство треугольника»:

dist (*x;* *y*) + dist (*y;* *z*) dist (*x;* *z*)*:*

Также нам понадобится понятие *наименьшего значения*: если *f*(*x*) — вы-ражение, куда можно подставлять разные значения переменной *x*, то

min *f*(*x*) —

*x*

это наименьшее число, которое может получиться при подстановке чего-либо в выражение *f*. Например, min*x* *x*2 = 0. Похожим образом обознача-ется наибольшее значение — max*x* *f*(*x*).

1. Рассмотрим квадрат *A*1*A*2*B*1*B*2 со стороной 1. Пусть *M*1 = *fA*1*;* *A*2*g*,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *M*2= *fB*1*; B*2*g*.Чему равно число | |  |  |  | ) |  |
|  | ( |  |  |  |  |
| max | min dist (*x;* *y*) | | | | ? |  |
| *x2M*1 | *y2M*2 |  |  |  |  |  |
| А чему равно | (*x2M*1 | *x* | *y* | ) | ) |  |
| *y2M*2 |  |
| min | max dist ( *;* | |  | ? |  |

Например, для подсчета первого выражения вам нужно для каждой из точек *A*1, *A*2 найти расстояние до ближайшей к ней точки из мно-жества *M*2, а затем взять наибольшее из этих двух расстояний.

1. Как оказалось, *M*1 и *M*2 из предыдущего пункта — пример таких множеств, что указанные нами величины для них не совпадают. Докажите тем не менее, что для любых двух *A*, *B* выполнено нера-венство:
   * **35** −

2018 год, 8 класс

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x2A* | ( *y2B* | *x* | *y* | ) |  | *y2B* | ( *x2A* | *x* | *y* | ) | ) |  |
| max | min dist ( *;* | |  | ) |  | min | max dist ( *;* | |  | *:* |  |

1. Докажите, что по заранее заданному положительному числу *r* все-гда можно подобрать два множества *A*, *B* так, что разность двух ве-личин из предыдущего пункта будет равна *r*. Иными словами, эту разность можно сделать сколь угодно большой.

Также нам потребуется понятие *окрестности множества*. Пусть *A* — ко-нечное и состоит из точек на плоскости. Тогда его окрестность — это фигура, являющаяся объединением кругов радиуса с центрами в точ-ках множества *A*. Для иллюстрации этого понятия предлагаем вам изоб-разить 1–окрестность множества из двух точек, расстояние между кото-рыми равно 2.

1. Приведите пример *A*, *B* таких, что *A* целиком лежит в 1–окрестнос-ти *B*, но *B* не лежит в 1–окрестности *A*.
2. Пусть *A*, *B* и *C* — три конечных множества точек на плоскости. До-кажите, что если *B* целиком лежит в 1–окрестности *A*, а *C* целиком лежит в 2–окрестности *B*, то *C* целиком лежит в ( 1 + 2)–окрест-ности множества *A*.
3. Докажите, что для любого *A* выполнено

* )

max min dist (*x;* *y*) = 0*:*

*x2A* *y2A*

* + )

1. Докажите, что если max*x2A* min*y2B* dist (*x;* *y*) *R*, то множество *A* целиком лежит в *R*–окрестности множества *B*. Докажите обратный факт.
2. Пользуясь предыдущими пунктами, проверьте, что для следующе-го выражения (вместо *A* и *B* можно подставлять конечные множе-ства точек на плоскости) выполнены три свойства расстояния, пе-речисленные в начале этой задачи:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| DIST (*A;* *B*) = max { | max | ( | min dist ( *;* | | ) | ) | *;* max | ( | min dist ( *;* | | *y* | ) | *:* |  |
| *x2A* | *y2B* | *x* | *y* | *x2B* | *y2A* | *x* |  | )} |  |

* частности, первое свойство следует из того, что выражение никак не меняется при замене *A* на *B* и наоборот.

Поздравляем вас! Только что вы определили **расстояние Хаусдорфа** — DIST (*A;* *B*) — между множествами на плоскости. Это незаменимый объ-ект в математике. Предлагаем вам доказать простейший, но очень важ-ный факт про это расстояние:

− **36** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

1. Если *A* и *B* являются подмножествами одного и того же круга ради-

уса *R*, то DIST (*A;* *B*) 2*R*.

**Задача 3. Изображения на плоскости**

*«Алгоритм Тарского, да? :)*

* данной задаче нас будет интересовать возможность представить мно-жество точек на плоскости как множество решений какого-либо уравне-

ния или неравенства. Например, уравнение *x y* = 0 задает прямую с углом наклона 45*◦*, а неравенство *min*(*x;* *y*) 0 — первую координатную четверть.

При составлении неравенств и уравнений вам разрешено пользоваться арифметическими действиями — сложением, умножением, вычитани-ем, делением, функцией модуля — *j* *: : :* *j*, а также max и min — взятием наибольшего и наименьшего значений из конечного набора чисел.

1. Докажите, что

(а) *A B* *>* 0 тогда и только тогда, когда числа *A* и *B* одного знака,

( )

(б) min(*x;* *y*) = 1 *x* + *y* *j* *x* *yj* ,,

2

(в) Даны числа *a*1 *<* *a*2 *< : : : <* *an*. Докажите, что если *ak* *<* *x* *<* *ak*+1,то знак выражения

(*x* *a*1) (*x a*2) *: : :* (*x an*)

совпадает со знаком выражения ( 1)*n* ( 1)*k*.

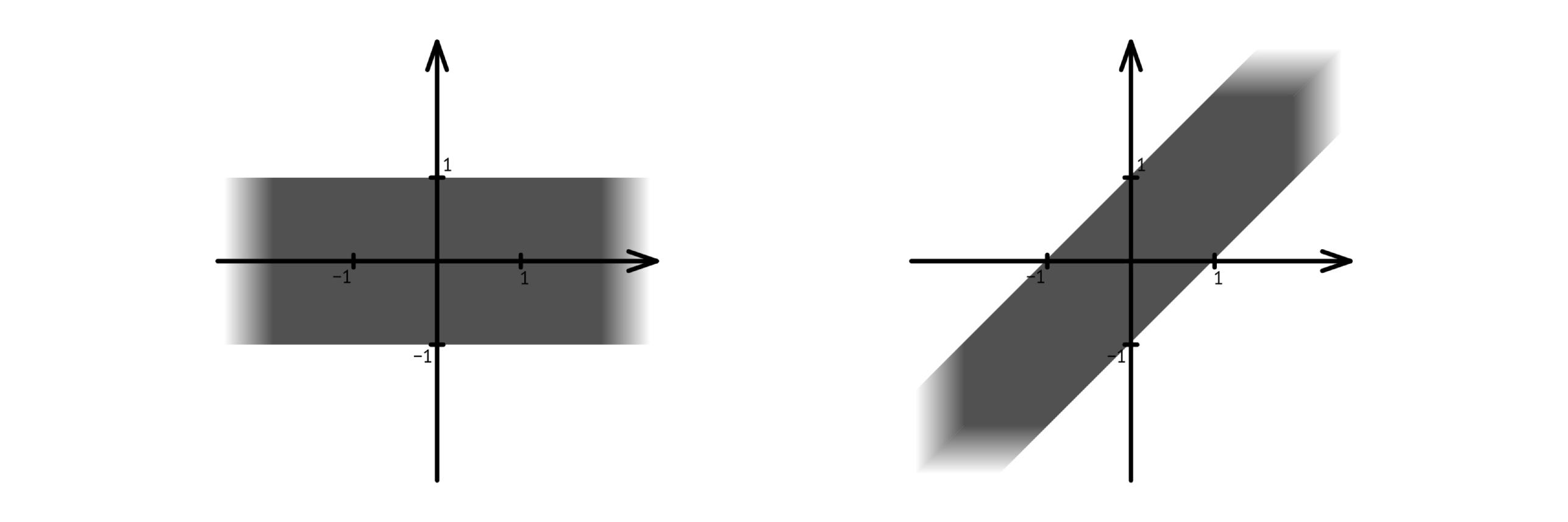
1. Изобразите множество точек (*x;* *y*) на плоскости, удовлетворяющих неравенству

max(*jxj;* *jyj*) 1*:*

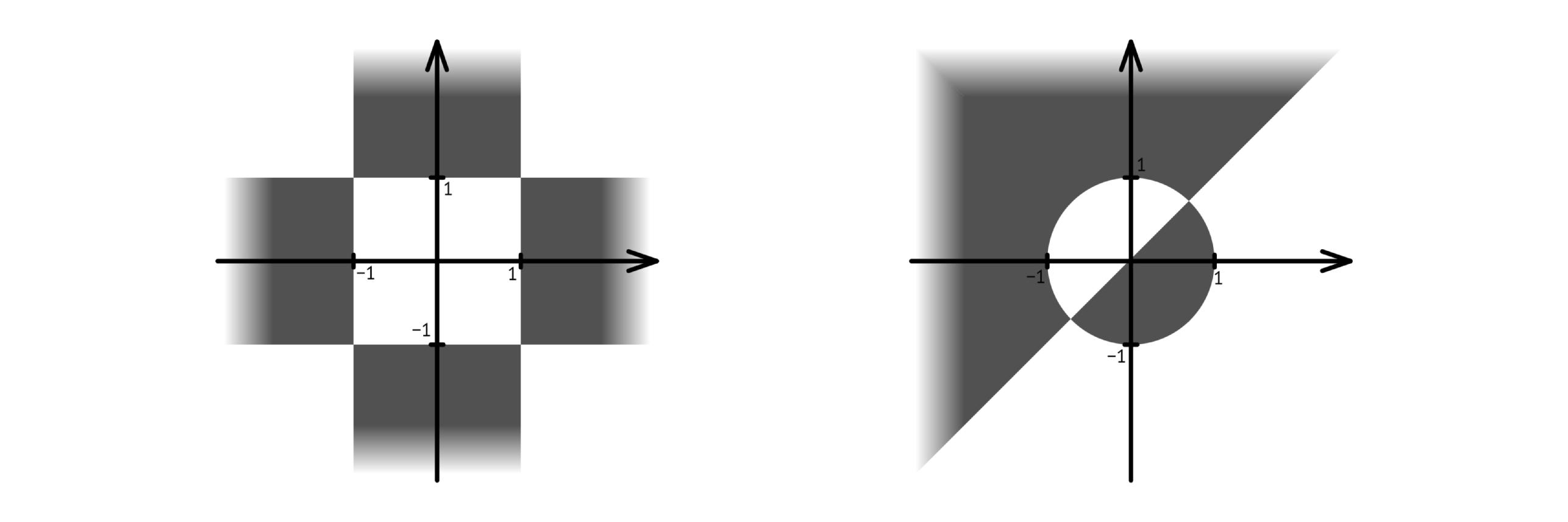
1. Множеством решений какого неравенства является (а) горизон-тальная полоса на плоскости, (б) наклонная полоса на плоскости (смотреть рисунок)?

− **37** −

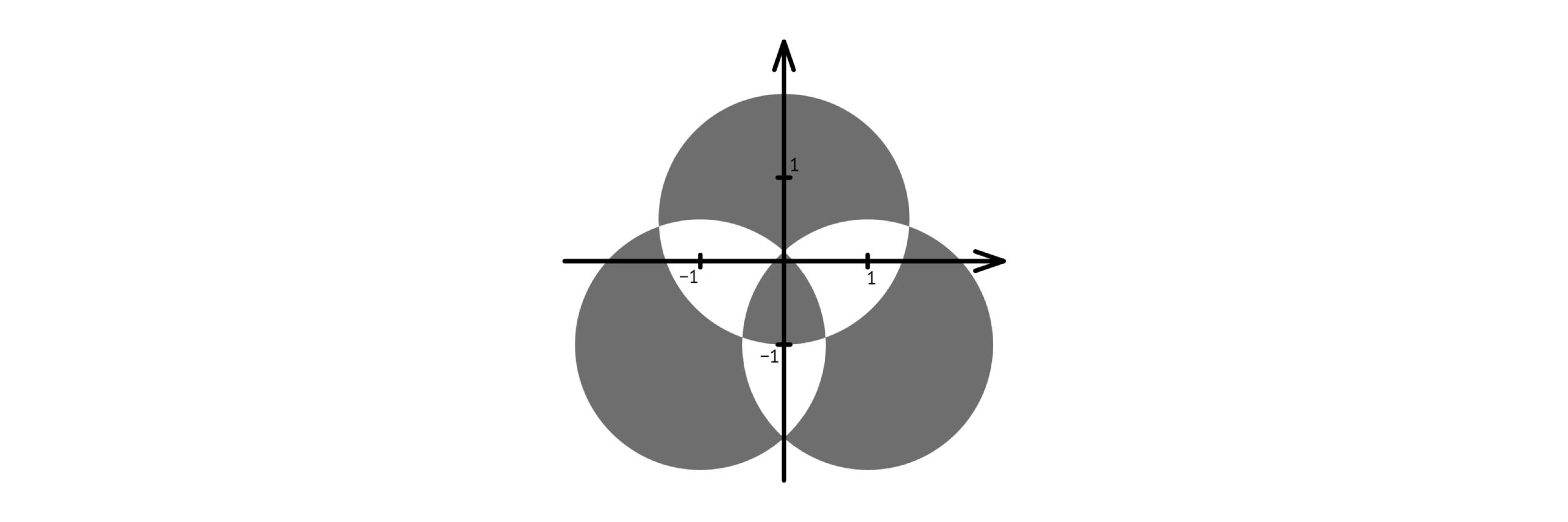
2018 год, 8 класс



1. Множеством решений какого неравенства является (а) «крестик» на плоскости, (б) фигура, полученная из круга и полуплоскости (смот-реть рисунок)?

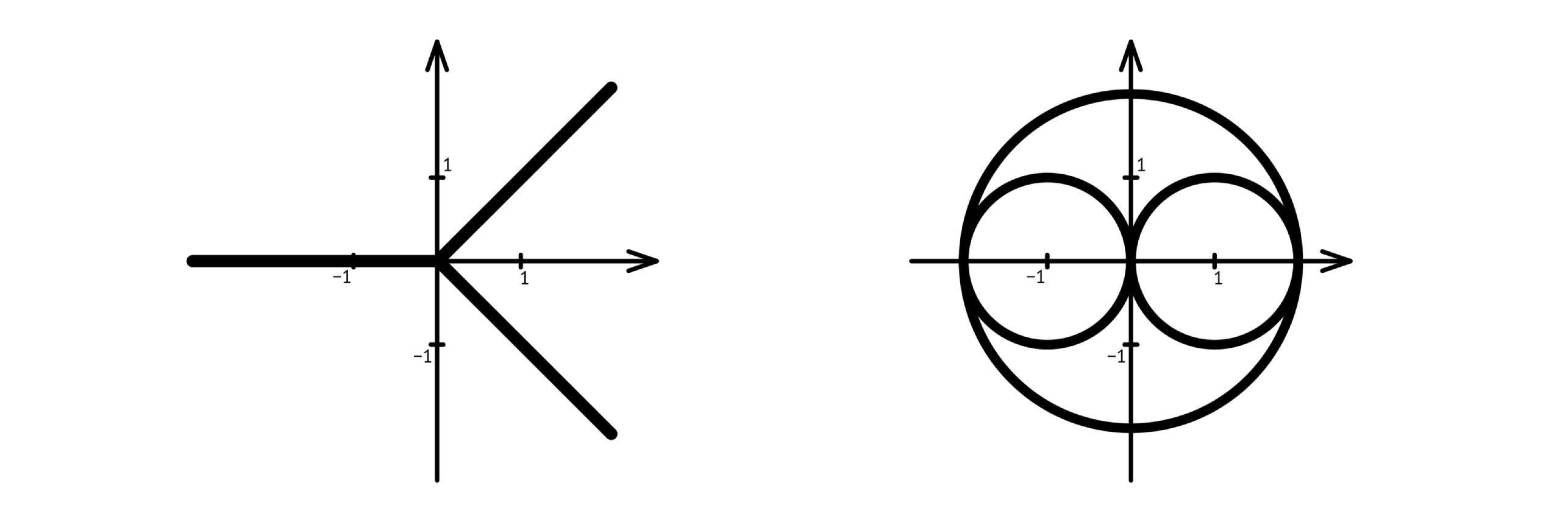


1. Множеством решений какого неравенства является фигура (смот-реть рисунок), полученная из трех кругов радиуса 1*:*5 с центрами в точках (1*;* 1), ( 1*;* 1), (0*;* 0*:*5)?



1. Множеством решений какого уравнения является (а) фигура из трех окружностей, (б) фигура из трех лучей (смотреть рисунок)?
   * **38** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»



1. Пусть фигура *F*1 — множество решений уравнения *P*1(*x;* *y*) = 0, а *F*2 — множество решений уравнения *P*2(*x;* *y*) = 0. Приведите уравнение, решения которого образуют (а) пересечение фигур *F*1 и *F*2, (б) объ-единение фигур *F*1 и *F*2?
2. Пусть фигура *F*1 — множество решений неравенства *P*1(*x;* *y*) *<* 0, а *F*2—множество решений неравенства *P*2(*x; y*) *<* 0.Приведите нера-венства, решения которого образуют (а) пересечение фигур *F*1 и *F*2, (б) объединение фигур *F*1 и *F*2, (в) множество точек, лежащих либо в фигуре *F*1, либо в фигуре *F*2, но не в них обеих одновременно?

− **39** −

**Условия задач 2017 года**

**Задачи 4 класса**

**Задача 1. Обаятельный домовенок**

1. Про домовенка Кузю издано 40 статей. Кузя решил заняться их чте-нием с целью узнать о себе что-нибудь новое. Каждый день Кузя читает по 6 статей, но при этом издается 4 новых. Как скоро Кузя догонит издателей?
2. Кузя напечатал 10 000 квадратиков со стороной 1 см, после этого у него в картридже закончились чернила. Сколько квадратиков со стороной 2 см он сможет напечатать, если у него есть полный кар-тридж, аналогичный имевшемуся?
3. Дана таблица 7 7. В центры ее клеток Кузя вбил гвоздики. Про-ведите линию через все гвоздики так, чтобы сделать при этом как можно меньшее количество поворотов (линию при этом можно ве-сти только горизонтально и вертикально).

**Задача 2. Велопоход**

1. Девочка въезжает в горку длиной 400 метров со скоростью 10 кило-метров в час. Как долго она будет это делать?
2. Начинающая Полина едет на велосипеде без остановок со скоро-стью 15 км*=*ч, а опытный Дмитрий Григорьевич — со скоростью 34 км*=*ч, но остановки на отдых отнимают у него столько же вре-мени, сколько он находится в движении. Кто же в итоге быстрее?
3. Подъем в горку и спуск с нее имеют одинаковую длину. Степан на гоночном велосипеде въезжает в горку со скоростью 10 км*=*ч, а спус-кается со скоростью 40 км*=*ч. А Петр на тракторе едет с постоянной скоростью 17 км*=*ч. Кто из них быстрее преодолеет подъем и спуск?

2017 год, 4 класс

**Задача 3. Буквы на белом листе**

1. Какие буквы русского алфавита можно перерисовать в другие, до-бавляя линии?
2. Какая буква русского алфавита, если написать ее на листе бумаги, поделит его на наибольшее число областей?
3. Вдохновившись предыдущими пунктами этой задачи, мальчик Ге-ра Симонов написал на листе бумаги две буквы О. На сколько обла-стей они могли поделить лист?

**Задача 4. Делить и резать, резать и делить**

1. Как двумя линиями разделить прямоугольник на четыре части оди-наковой площади, имея только карандаш и линейку без разметки?
2. Изобразите фигуру, которую можно одним прямым разрезом поде-лить на три части одинаковой площади.
3. Каждый из двух разрезов делит фигуру на две части одинаковой площади. Обязательно ли вместе они делят фигуру на четыре ча-сти одинаковой площади?

**Задача 5. О, как мы далеки!**

1. На прямой дороге расположены четыре остановки: *A*, *B*, *C*, *D* (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между ос-тановками *A* и *D* равно 1 км, между *B* и *C* — 2 км, между *B* и *D* — 3 км, между *A* и *B* — 4 км, а между *C* и *D* — 5 км. Чему равно расстояние между остановками *A* и *C*?
2. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между со-седними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо еще посадить, чтобы расстояние между любыми двумя сосед-ними деревьями было одинаковым?
3. Можно ли на прямой отметить точки *A*, *B*, *C*, *D* и *E* так, чтобы рас-стояния между ними оказались равны: *AB* = 6, *BC* = 7, *CD* = 10, *DE* =9, *AE* =12?Если можно,то покажите как,если нет—объяс-ните почему.

− **42** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»

**Задача 6. Быть врачом — весьма ответственно!**

**A.** Доктор оперирует Геометричного дождевого червя.Особенностьчервя в том, что, отдыхая, он выворачивается линией из шести от-резков, которая пересекает каждый свой отрезок ровно один раз. При этом он еще и кусает себя за хвост. Как выглядит отдыхающий Геометричный дождевой червь?

1. Другой доктор учится закреплять сломанные кости. На экзамене ему выдали шесть абсолютно прямых костей одинаковой длины. Он должен завязать на этих костях 12 узлов хирургической нитью, причем на каждой кости должно быть по 4 узелка. Каждый узел свя-зывает не более двух костей. Помогите врачу справиться с этим за-данием.
2. Три доктора — Айболит, Пеппер и Ватсон — по очереди опери-руют заразного больного, при этом у них всего две пары перчаток. Перчатки можно надевать наизнанку и друг на друга. По медицин-ским правилам руки разных хирургов не должны касаться одной поверхности перчаток. Оперировать одной рукой нельзя. Могут ли хирурги обойтись данными им перчатками?

**Задачи 5 класса**

**Задача 1. Поделим – посмотрим**

1. На какое наибольшее число областей делят плоскость 4 прямоуголь-ных треугольника?
2. На какое наибольшее число областей может разбить прямая семи-угольник? Докажите, что на большее число никакой семиугольник разбить нельзя.
3. На какое наибольшее число областей делят плоскость 15 одинако-вых по размеру квадратов, все стороны которых горизонтальны ли-бо вертикальны?

**Задача 2. Шутка**

1. Дана 200-этажная башня. Стул с 30 ножками скидывают с ее крыши,
   * одновременно с этим более легкий стул совсем без ножек отправ-
     + **43** −

2017 год, 5 класс

ляют катиться вниз по лестнице внутри башни. Может ли безногий стул достигнуть земли быстрее, чем летящий?

1. Выписка из дневника автора задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»:

*Так, вчера я придумал всего четыре задачи... Мне снилось, что сегодня я придумаю в полтора раза больше задач, чем в сумме за день, когда сегодня останется вчера, и за день, для которого сегодня должно было наступить завтра... Однако*

* *день, который будет вчера для завтра и был завтра для вчера, я придумал в три раза больше задач, чем за послезав-трашнее вчера... Что за сны-то такие странные в послед-нее время?..*

Если верить сну, сколько задач должен был придумать автор в день, когда он оставил эту заметку?

1. Автомобиль выехал из Петербурга в Пекин и сломался через 80 ки-лометров. На исправление неполадок ушло, правда, всего две ми-нуты. Однако, проехав еще 40 километров, автомобиль вновь сло-мался, но вновь был отремонтирован за две минуты. Далее перед каждой следующей поломкой автомобиль проезжал вдвое меньше, чем перед предыдущей, но приводился в рабочее состояние за не-изменные две минуты. Доедет ли он в итоге до Пекина?

**Задача 3. О, как мы далеки!**

1. На прямой дороге расположены четыре остановки: *A*, *B*, *C*, *D* (не обязательно в таком порядке). Известно, что расстояние между ос-тановками *A* и *D* равно 1 км, между *B* и *C* — 2 км, между *B* и *D* — 3 км, между *A* и *B* — 4 км, а между *C* и *D* — 5 км. Чему равно расстояние между остановками *A* и *C*?
2. Вдоль прямой аллеи растут четыре дерева. Расстояния между со-седними равны 63, 14 и 84 метра соответственно. Сколько деревьев надо ещё посадить, чтобы расстояние между любыми двумя сосед-ними деревьями было одинаковым?
3. Можно ли на прямой отметить точки *A*, *B*, *C*, *D* и *E* так, чтобы рас-стояния между ними оказались равны: *AB* = 6, *BC* = 7, *CD* = 10, *DE* =9, *AE* =12?Если можно,то покажите как,если нет—объяс-ните, почему.
   * **44** −

Сборник задач олимпиады «Математика НОН-СТОП»